УДК 528.1+550.3

АПРОКСИМАЦІЯ НАПРУЖЕНОСТІ МАГНІТНОГО ПОЛЯ ЗЕМЛІ МНОГОЧЛЕНАМИ ЛЕЖАНДРА, ЧЕБИШОВА ТА РЯДАМИ ФУР'Є І ПОРІВНЯННЯ ЇХ ТОЧНОСТІ

А. Согор, Р. Фоца, Б. Джуман, І. Бойко
Національний університет "Львівська політехніка"

Ключові слова: апроксимація, многочлени Лежандра, многочлени Чебишова, ряд Фур'є, напруженість магнітного поля Землі.

Постановка проблеми

Необхідність наближення функцій виникає під час теоретичних досліджень та практичних розрахунків в багатьох галузях науки і техніки. Під час виконання експерименту найчастіше одержують таблично задану функцію. Для таких функцій бажано отримати аналітичний вираз, оскільки його легше дослідити, а також інтерпретувати одержані результати.

Результати спостережень напруженості геомагнітного поля (z) можна подати у вигляді суми двох компонент, одна з яких (W) розглядається як невипадкова функція від часу, а інша (w) – як випадкова :

$$z(t) = W(t) + \mathrm{w}(t). \quad (1)$$

Детермінована частина $W(t)$ відображає закономірну зміну ознаки у межах часової області досліджень. Випадкова складова $w(t)$ – це флуктуація навколо систематичної складової $W(t)$.

Виклад основного матеріалу дослідження

У роботі виконана апроксимація емпіричних даних щоденних вимірювань напруженості магнітного поля Землі за 1995р. Вимірювання здійснені на пункті Брід у районі Вигорлат-Гутинського вулканічного пасма. Одиниці вимірювань – нанотесли (нТл). За вихідні дані прийнято матрицю вимірів $Y[i]$, а також матрицю часу $X[i]$.

Спочатку здійснимо апроксимацію степеневими многочленами 10-го порядку. Шукана функція матиме вигляд:

$$y = \sum_{j=0}^{r} C_j X^j , \quad (2)$$

де $r = 10$ – порядок многочлена. Отже, наша задача звелася до визначення невідомих коефіцієнтів C_j. Якщо у формулі (2) замінити X та y їх виміряними значеннями, то одержимо приблизні рівності. Щоб дістати строгі рівності, необхідно у функцію ввести деякі поправки ω_i ($i = \overline{1,n}$, $n = 365$ – кількість вимірів). Отримаємо систему рівнянь:

$$y_i + \omega_i = \sum_{j=0}^{r} C_j X_i^j , \quad i = \overline{1,n} , \quad (3)$$

де y_i і X_i – елементи матриць $Y[i]$ і $X[i]$ відповідно.

Система рівнянь (3) недовизначена, оскільки кількість невідомих $n + r + 1$ більша за кількість рівнянь n. Розв'яжемо її за допомогою методу найменших квадратів. Оскільки виміри рівноточні, сформуємо деяку функцію F:

$$F = [\omega_i \omega_i] = \min \quad (4)$$

Виразивши ω_i із (3) і підставивши у (4), отримаємо:

$$F = \begin{array}{l} (C_0 X_1^0 + C_1 X_1^1 + \ldots + C_r X_1^r - y_1)^2 + \ldots + \\ +(C_0 X_n^0 + C_1 X_n^1 + \ldots + C_r X_n^r - y_n)^2 = \min \end{array} . \quad (5)$$

Функція F є функцією коефіцієнтів C_j. Як відомо з математичного аналізу, щоб знайти екстремум (в нашому випадку мінімум) функції багатьох змінних, потрібно розв'язати таку систему рівнянь:

$$\frac{\partial F}{\partial C_j} = 0, \ j = \overline{0,r} . \quad (6)$$

Після знаходження часткових похідних в системі рівнянь (6) і деяких елементарних перетворень одержимо систему рівнянь:

$$\begin{cases} (X_1^0 X_1^0 + X_2^0 X_2^0 + \ldots + X_n^0 X_n^0) C_0 + \ldots + (X_1^0 X_1^r + X_2^0 X_2^r + \ldots + X_n^0 X_n^r) C_r - (X_1^0 Y_1 + X_2^0 Y_2 + \ldots + X_n^0 Y_n) = 0 \\ (X_1^0 X_1^1 + X_2^0 X_2^1 + \ldots + X_n^0 X_n^1) C_0 + \ldots + (X_1^1 X_1^r + X_2^1 X_2^r + \ldots + X_n^1 X_n^r) C_r - (X_1^1 Y_1 + X_2^1 Y_2 + \ldots + X_n^1 Y_n) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (X_1^0 X_1^r + X_2^0 X_2^r + \ldots + X_n^0 X_n^r) C_0 + \ldots + (X_1^r X_1^r + X_2^r X_2^r + \ldots + X_n^r X_n^r) C_r - (X_1^r Y_1 + X_2^r Y_2 + \ldots + X_n^r Y_n) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

Отже, отримано нормальну систему рівнянь (7), що містить r+1 р-нь і r+1 невідомих. Перетворимо її на таке матричне рівняння :

$$A\cdot C - B = 0 \tag{8}$$

У (8) матриця C – вектор невідомих коефіцієнтів, елементи матриці A є функціями елементів матриці X, а елементи матриці B – функціями елементів матриць X та Y, тобто

$$a_{kj} = \sum_{i=1}^{n} X_i^{k+j-2},$$

$$b_j = \sum_{i=1}^{n} X_i^{j-1} \cdot y_i, \tag{9}$$

де a_{kj} і b_j – елементи матриць A і B відповідно, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,r+1}$, $k = \overline{1,r+1}$.

Із (8) знаходимо матрицю C:

$$C = A^{-1} \cdot B. \tag{10}$$

Отриманий результат показано на рис. 1.

Проапроксимуємо функцію многочленами Чебишова 10-го порядку. У загальному вигляді многочлени Чебишова мають вигляд:

$$T_n = \cos(n\cdot\arccos(x)). \tag{11}$$

Формулу (11) можна подати в рекурентному вигляді:

$$T_n(x) = 2x\cdot T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x). \tag{12}$$

При цьому $T_0 = 1$, $T_1 = x$.

Шукана функція матиме вигляд:

$$y' = \sum_{j=0}^{r} C_j' T_j(x), \tag{13}$$

де r = 10 – порядок многочлена, $T(x)$ – многочлени Чебишова. Наша задача знов-таки звелася до знаходження C_j' Аналогічно, як і для степеневих многочленів, замінимо y' їх виміряними значеннями, а $T(x)$ – їх обчисленими значеннями, введемо поправки у значення функції і складемо суму їх квадратів. Одержимо функцію F' :

$$F' = [C_0'T_0(x_1) + C_1'T_1(x_1) + \ldots + C_r'T_r(x_1)y_1]^2 + \ldots + [C_0'T_0(x_n) + C_1'T_1(x_n) + \ldots + C_r'T_r(x_n)y_n]^2 = \min. \tag{14}$$

Після мінімізації функції F' отримаємо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} [T_0(x_1)T_0(x_1) + \ldots + T_0(x_n)T_0(x_n)]C_0' + \ldots + [T_0(x_1)T_r(x_1) + \ldots + T_0(x_n)T_r(x_n)]C_r' - [T_0(x_1)y_1 + \ldots + T_0(x_n)y_n] = 0 \\ [T_0(x_1)T_1(x_1) + \ldots + T_0(x_n)T_1(x_n)]C_0' + \ldots + [T_1(x_1)T_r(x_1) + \ldots + T_1(x_n)T_r(x_n)]C_r' - [T_1(x_1)y_1 + \ldots + T_1(x_n)y_n] = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ [T_0(x_1)T_r(x_1) + \ldots + T_0(x_n)T_r(x_n)]C_0' + \ldots + [T_r(x_1)T_r(x_1) + \ldots + T_r(x_n)T_r(x_n)]C_r' - [T_r(x_1)y_1 + \ldots + T_r(x_n)y_n] = 0. \end{cases} \tag{15}$$

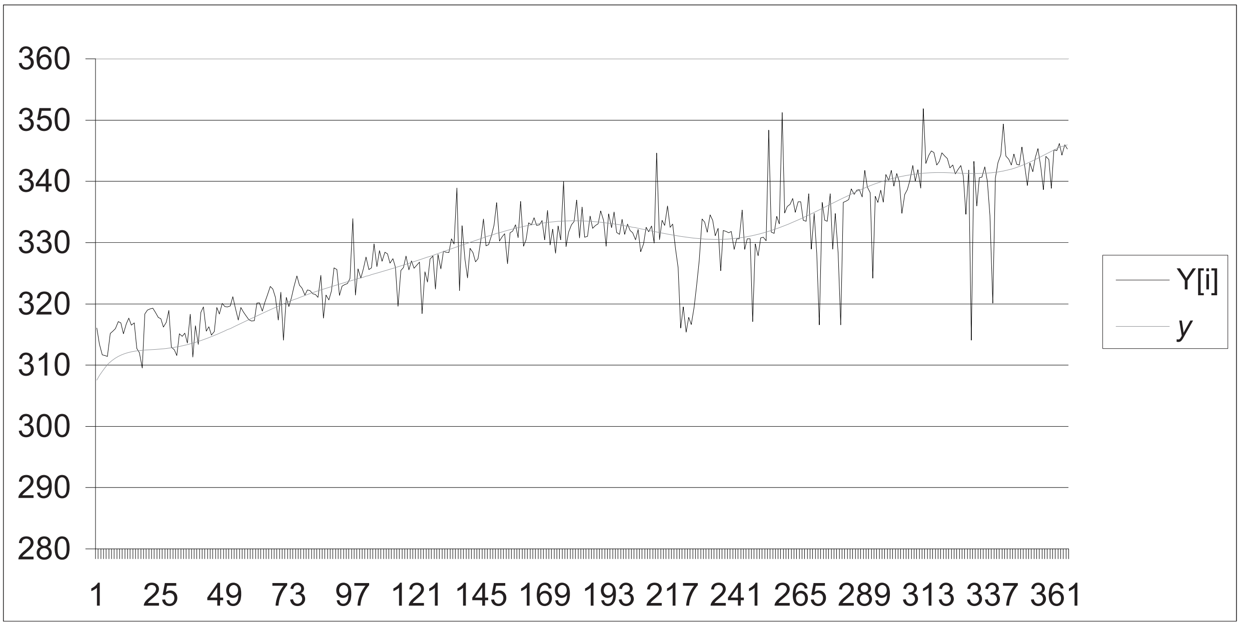

Рис. 1. Функція, апроксимована степеневими многочленами

Перепишемо нормальну систему рівнянь (15) у матричному вигляді :

$$A'C' - B' = 0. \qquad (16)$$

У (16) матриця C' – вектор невідомих коефіцієнтів, елементи матриці A' є функціями елементів матриці X, а елементи матриці B' – функціями елементів матриць X та Y, тобто

$$a'_{kj} = \sum_{i=1}^{n} T_{k-1}(x_i) \cdot T_{j-1}(x_i),$$
$$b'_j = \sum_{i=1}^{n} T_{j-1}(x_i) \cdot y_i, \qquad (17)$$

де a', b' – елементи матриць A' і B' відповідно, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,r+1}$, $k = \overline{1,r+1}$

Із (16) знаходимо матрицю C' :

$$C' = A'^{-1} \cdot B'. \qquad (18)$$

Отриманий результат показано на рис. 2.

Середню квадратичну похибку відхилення многочлена від функції можна визначити за формулою:

$$m = \sqrt{\frac{[\delta\delta]}{n-(r+1)}}, \qquad (19)$$

де δ – різниця між вихідними даними і апроксимованим многочленом.

Отже, для степеневих многочленів $m_c = 4{,}59$, а для многочлена Чебишова $m_Ч = 4{,}44$.

Проте степеневі поліноми відображають характер процесу недостатньо точно. Крім них, використано тригонометричні ряди Фур'є. Проапроксимуємо нашу функцію тригонометричним рядом Фур'є за степеневими многочленами. Для цього створимо допоміжну табличну функцію $\tau(x)$:

$$\tau(x_i) = Y[i] - y(x_i), \qquad (20)$$

де $Y[i]$ – вихідна матриця, $y(x_i)$ – апроксимована функція.

Тобто ми одержали нову табличну функцію τ, яку необхідно апроксимувати рядом Фур'є. Оскільки ряд Фур'є – функція періодична з періодом 2π, а аргумент функції τ змінюється від 1 до n, введемо додаткову змінну ξ:

$$\xi = \frac{2\pi(x-1)}{n-1}. \qquad (21)$$

Отже, позначивши шукану функцію τ_{an}, можна записати:

$$\tau_{an} = \sum_{l=1}^{p}(a_l \cos l\xi + b_l \sin l\xi),$$

або (22)

$$\tau_{an} = \sum_{l=1}^{p}(a_l \cos\frac{2\pi l(x-1)}{n-1} + b_l \sin\frac{2\pi l(x-1)}{n-1}),$$

де P – порядок ряду Фур'є, a_l, b_l – коефіцієнти ряду Фур'є.

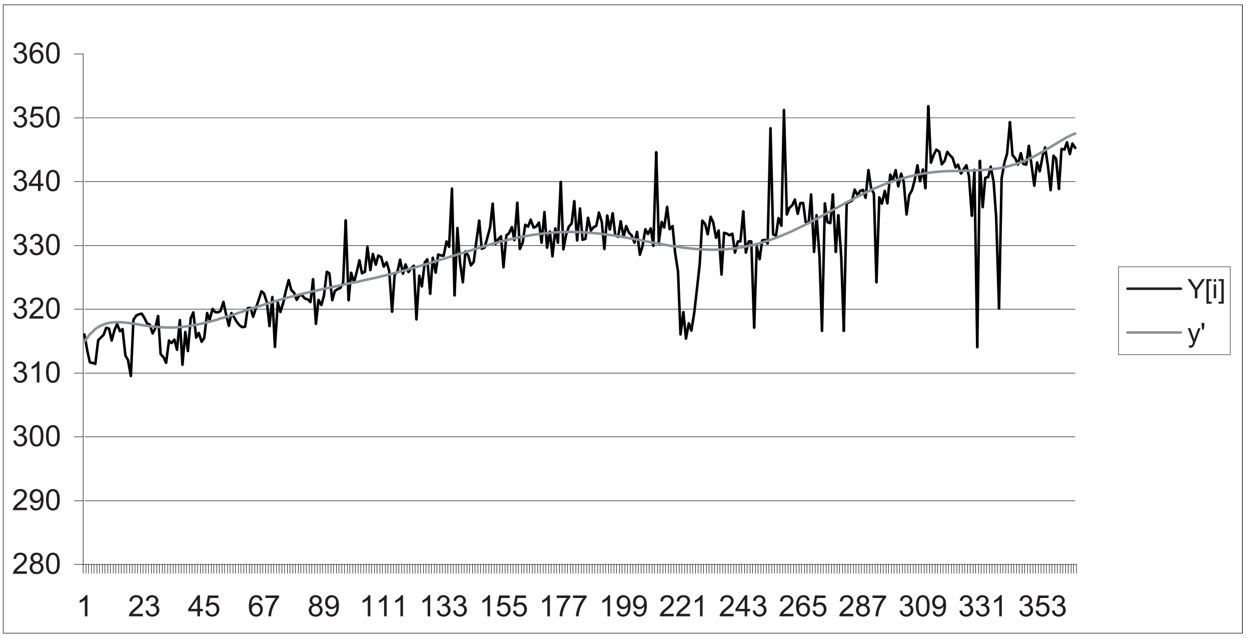

Рис. 2. Функція, апроксимована многочленами Чебишова

Вважаючи, що $\tau(x)$ дорівнює деякій функції від ξ, тобто $\tau(x) = \varphi(\xi)$, визначимо коефіцієнти ряду Фур'є за формулами [1]:

$$\begin{cases} a_l = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\varphi(\xi)\cos l\xi d\xi \\ b_l = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\varphi(\xi)\sin l\xi d\xi \end{cases}. \quad (23)$$

Перетворимо формулу (23), замінивши ξ на x:

$$\begin{cases} a_l = \dfrac{2}{n-1}\displaystyle\int_1^{n}\tau(x)\cos\dfrac{2\pi l(x-1)}{n-1}dx \\ b_l = \dfrac{2}{n-1}\displaystyle\int_1^{n}\tau(x)\sin\dfrac{2\pi l(x-1)}{n-1}dx \end{cases}. \quad (24)$$

Із застосуванням методів числового інтегрування (24) набудуть вигляду:

$$\begin{aligned} a_l &\approx \frac{2}{n-1}\sum_{i=2}^{n}\tau(x_i)\cos\left[\frac{2\pi l}{n-1}(x_i-1)\right] \\ b_l &\approx \frac{2}{n-1}\sum_{i=2}^{n}\tau(x_i)\sin\left[\frac{2\pi l}{n-1}(x_i-1)\right] \end{aligned}. \quad (25)$$

Остаточно апроксимована функція матиме вигляд:

$$H_c = y(x) + \tau_{an}. \quad (26)$$

Її зображено на рис. 3.

Міркуючи аналогічно, проапроксимуємо нашу вихідну функцію рядами Фур'є за многочленами Чебишова. У цьому випадку шукана функція набуде вигляду:

$$H_Ч = y'(x) + \tau'_{ап}. \quad (28)$$

Функція (28) зображена на рис. 4.

$$\tau'(x_i) = Y[i] - y'(x_i). \quad (27)$$

Середню квадратичну похибку для функцій (26) і (28) можна знайти за формулою :

$$m = \sqrt{\frac{[\delta\delta]}{n-(2p+r+1)}}. \quad (29)$$

Отже, середня квадратична похибка для многочленів Лежандра і рядів Фур'є $m_{CФ} = 3{,}64$, а для многочленів Чебишова і рядів Фур'є $m_{ЧФ} = 3{,}63$.

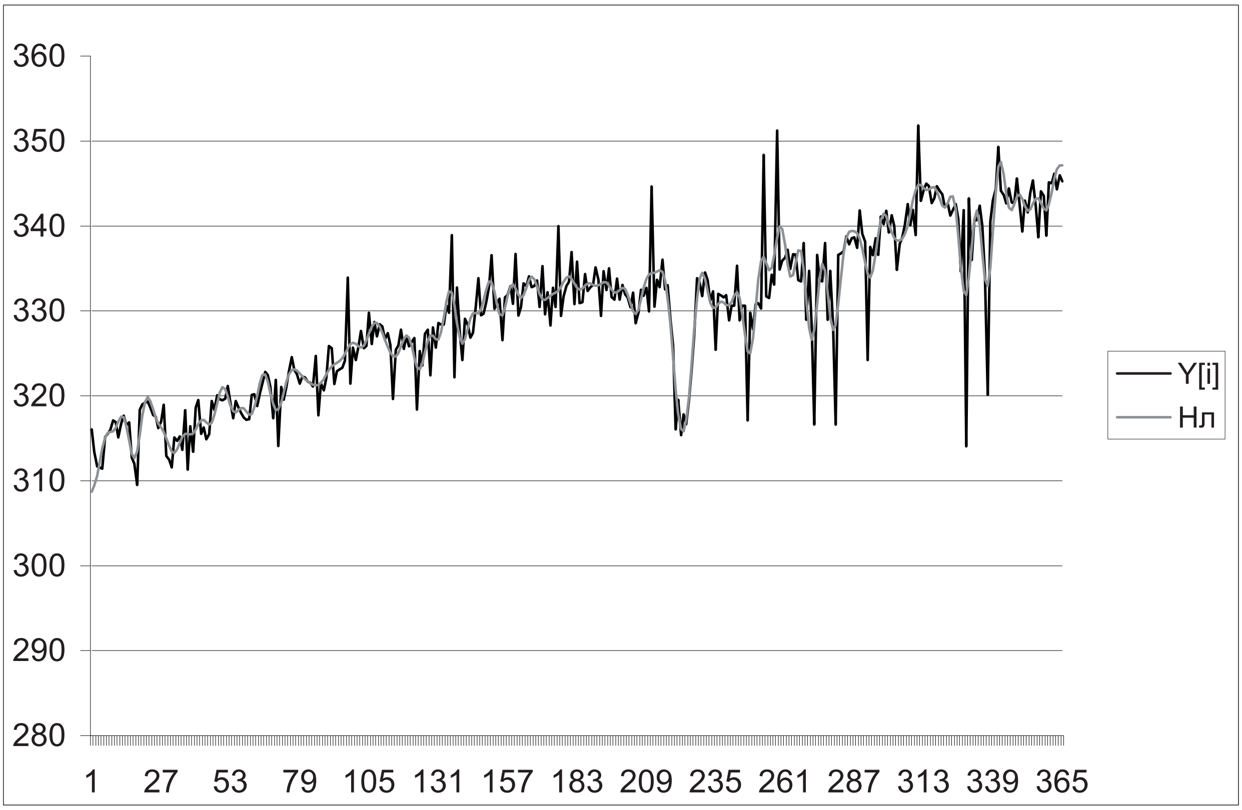

Рис. 3. Функція, апроксимована степеневими поліномами і тригонометричними рядами Фур'є

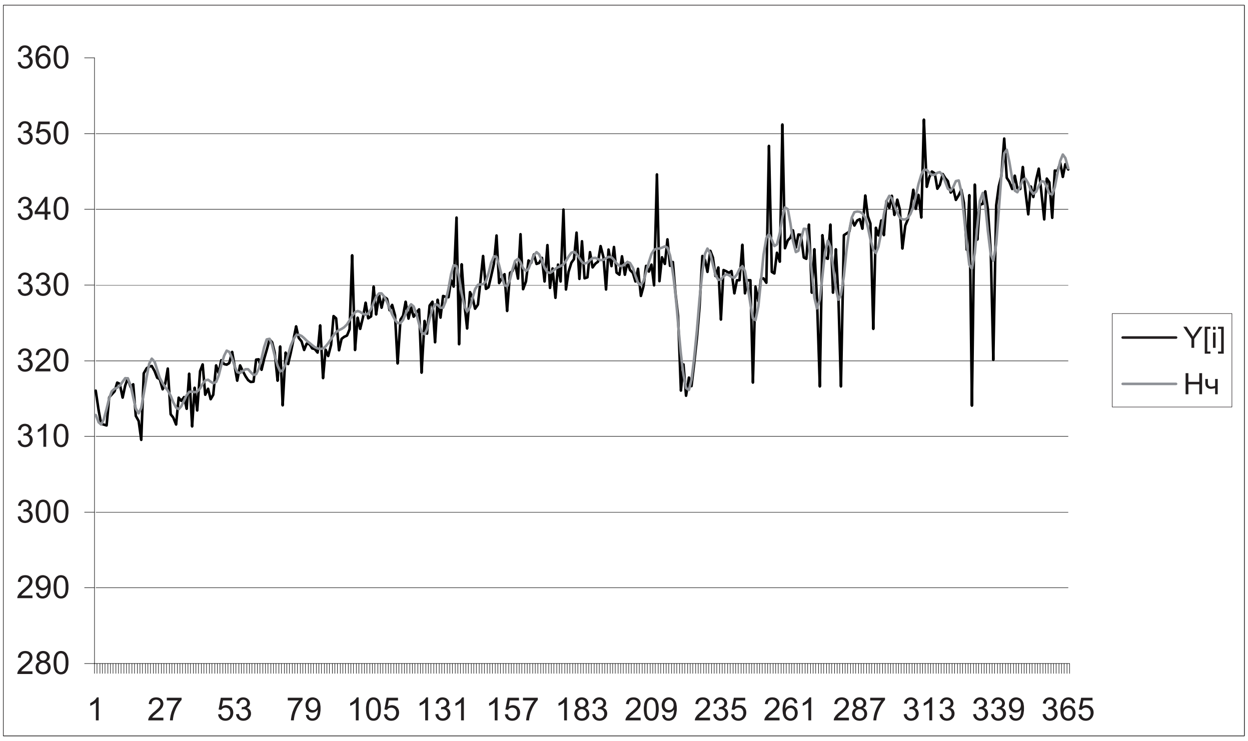

Рис. 4. Функція, апроксимована многочленами Чебишова і тригонометричними рядами Фур'є

Висновок

Часові ряди, які описують досліджуване поле, можуть бути апроксимовані комбінацією двох функцій: степеневого полінома, який відображає тренд функції (довгохвильові ефекти поля), та ряду Фур'є, який відображає флуктуацію функції (короткохвильові ефекти поля), причому точність при апроксимації різними поліномами є практично однаковою.

Література

1. Смирнов В.И. Курс высшей математики. – М.: Наука, 1974.

2. Вычислительная математика и техника в разведочной геофизике: Справочник геофизика / Под ред. В.И. Дмитриева. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Недра, 1990.

3. Йосипчук М.Д., Согор А.Р., Заяць О.С., Бойко П.М., Юрас М.І. Середньоквадратична апроксимація вимірів напруженості магнітного поля Землі степеневими поліномами // Геодезія, картографія і аерофотознімання, 2002. – С. 25–27

Апроксимація напруженості магнітного поля Землі многочленами Лежандра, Чебишова та рядами Фур'є і порівняння їх точності

А. Согор, Р. Фоца, Б. Джуман, І. Бойко

Розглянуто питання, пов'язані з апроксимацією напруженості магнітного поля Землі. Описано алгоритм наближення функції з двома складовими: систематичною і флуктуаційною. Для перевірки алгоритму складено програму мовою Pascal.

Аппроксимация напряженности магнитного поля Земли многочленами Лежандра, Чебишева и рядами Фурье и сравнение их точности

А. Согор, Р. Фоца, Б. Джуман, И. Бойко

Рассмотрено вопросы, связанные с аппроксимацией напряженности геомагнитного поля Земли. Описан алгоритм приближения функции с двумя составляющими: систематической и флуктуационной. Для проверки алгоритма составлена программа на языке Pascal.

Aproximation of tension of the magnetic field of earth by polynomials of earth by polynomials of Legendre, Chebishev and rows of fourier comparison of the their exactness

A. Sogor, R. Fotsa, B. Dzuman, I. Boyko

Questions, related to approximation of tension of the geomagnetical field of Earth, are considered. In this article the algorithm of approaching of function is described with two constituents: systematic and fluctuation. The verification of this algorithm was done with use Pascal programming language.