

## СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ ДВОПЕРІОДНОЇ РИТМІКИ Й ОБҐРУНТУВАННЯ МОДЕЛІ ТА СТАТИСТИЧНОГО ОПРАЦЮВАННЯ В РАЗІ РІЗНОМАСШТАБНОСТІ ПЕРІОДІВ

© Дедів Л., Драган Я., 2011

**Обґрунтовано коректність застосування методів статистики періодично корельованих випадкових процесів для аналізу двоперіодної ритміки за умови різномасштабності періодів.**

**Ключові слова:** статистичний аналіз, двоперіодна ритміка, періодично корельований випадковий процес, різномасштабні періоди.

**The correctness for using of periodically correlated random processes statistical methods to analysis of twoperiodic rhythmic provided this periods are of different magnitudes is grounded.**

**Keywords:** statistical analysis, twoperiodic rhythmic, periodically correlated random process, period of different magnitude.

### Вступ

Під час вивчення складних систем, пов'язаних із коливаннями, вібраціями, шумами, незалежно від їхньої фізичної природи, об'єктом дослідження стають часові ряди, тобто статистичний матеріал у вигляді послідовності спостережень (замірів) у еквідистантні моменти часу чи неперервних реєстрограм за припущення, що цей ряд породжений відповідним імовірнісним механізмом і є реалізацією випадкового процесу, тобто міченою змінною  $t \in R$ , де  $R$  – числова вісь, послідовністю випадкових величин, як розуміють їх у теорії ймовірностей. Обґрунтовано, що для опрацювання рядів з метою обчислення статистичних оцінок імовірнісних характеристик застосовні засоби статистики порідного для ряду випадкового процесу.

Основною рисою, що виділяє аналіз часових рядів з-поміж інших видів статистичного опрацювання, є істотність порядку спостережень, бо вони у часових рядах, як правило, статистично залежні. Природа ряду і структура порідного процесу можуть відображатись у характері цієї залежності. Завдання статистики тоді полягає в тому, щоб на підставі обмеженої кількості даних про часовий ряд зробити коректні висновки щодо коректності механізму його породження, структури, що є основою випадкового процесу, і стану відповідної досліджуваної системи (пар [1]).

### Формування проблеми

Часові ряди, що стосуються функціонування складних систем, часто є ритмічними із сильним проявом флюктуацій та порушень ритмічності й тільки в загальних рисах мають відбиток коливності. А коливність функції розуміють як таку її властивість, що для кожного фіксованого  $t_0$  існує такий момент  $t > t_0$ , коли ця функція змінює знак.

Формальніше таку коливність описують як стохастичні флюктуації зі змінними в часі характеристиками [2]. Глибшої формалізації досягнуто у [3–7], де показано на підставі системного аналізу різної природи коливних процесів, що адекватною загальною моделлю таких ритмічних процесів є в разі одноперіодної ритміки періодично корельований випадковий процес (ПКВП), який означено засобами кореляційної теорії (чи, інакше, теорії другого порядку, достатньої для розв'язання енергетичних задач), оскільки їхні характеристики – математичне сподівання, дисперсія та кореляційні пов'язання є періодичними [3], та полі-ПКВП у складніших ситуаціях поліперіодної ритміки [4].

Теорія ПКВП пов'язує властивості процесів цього класу з добре вивченими властивостями стаціонарних процесів, завдяки чому просто вирішити проблему обґрунтування статистичних методів опрацювання реалізацій ПКВП: в цьому разі беззастережно застосовна статистика стаціонарних процесів (з незалежною очевидною модифікацією). Що ж до складної багатоперіодної ритміки, то такої можливості нема.

У багатьох важливих ситуаціях, зокрема в медичній діагностиці, постає проблема опрацювання часових рядів, отриманих від біомедоб'єктів складної специфічної часової організації [2]. Обґрунтувати потрібні методи без системного аналізу неможливо. Здійснена як вислід системного аналізу гільбертизація, тобто застосування засобів спеціальних видів гільбертових просторів і розвій теорії другого порядку з використанням енергетичної метрики, коли мірою випадкового процесу (в термінах використаного апарату – його норма) є середня потужність, стала засобом завершення, досягнення прозорості й простоти теорії і водночас охоплення енергетичною теорією проблеми обґрунтування моделі ритміки [7]. І проблема, розв'язання якої наведено в цій статті, – наступний після «зведення» статистики ПКВП до стаціонарної крок.

### Системний аналіз обґрунтування статистики двоперіодної ритміки

Складні системи досліджують зазвичай для ідентифікації чи визначення статистики, зокрема й обстеження організму людини виконують на підставі результатів неінвазивних процедур, що охоплюють збирання за допомогою належних засобів даних, опрацювання їх згідно з обґрунтованою структурою моделі породження даних як часового ряду, оснований на апріорних знаннях, алгоритмами та коректну інтерпретацію у термінах властивостей моделі результатів опрацювання, які у результаті виконання цих процедур стануть інформацією про стан системи і водночас підставою для обґрунтування рішень щодо цього стану і діагнозу. Сигнали, вислані системою як відповідні фізичні процеси, зміни характеристик яких відбивають структуру просторово-часового функціонування системи, є єдиним доступним дослідникові джерелом відомостей про стан системи. Видобування цих відомостей з сигналу і формування із них інформації про стан системи, тобто подання їх у належному вигляді чи достатній для діагностики кількості, забезпечують згадані вже процедури.

Біомедичні об'єкти внаслідок специфічної просторово-часової організації виявляють цілу ієрархію ритмів молекулярно-хімічного рівня, системно-структурного, еколого-адаптивного, тому загалом адекватною моделлю опису багатоперіодної ритміки стає поліПКВП як узагальнення ПКВП, але практично можна вести мову про обґрунтування статистичного опрацювання двоперіодної ритміки на підставі властивостей її моделі у вигляді біПКВП-моделі.

Зокрема, оцінюючи стан серцево-судинної системи за результатами опрацювання кардіограми, цю систему трактують як одноперіодний релаксаційний пульсатор і цілком коректно й обґрунтовано застосовують засоби статистики ПКВП. Але під час тривалого відслідковування функціонування серцево-судинної системи типу голтерівського моніторингу потрібно брати до уваги і добовий хід змін усього організму, тому природною моделлю, адекватною ситуації модулювання ритмозадавального пульсатора циркадним ритмом, буде біПКВП у вигляді

$$x(t) = \sum_{k,j \in Z} e^{it \left( k \frac{2\pi}{T_1} + j \frac{2\pi}{T_2} \right)} z_{kj}(t), \quad t \in R,$$

де  $T_1$  та  $T_2$  – періоди кардіоритму та добового ходу;  $z(t) = [z_{kj}(t)]_{k,j \in Z}$  – матричний нескінченновимірний стаціонарний випадковий процес; а  $Z$  – множина цілих чисел.

Коли взяти до уваги надто вже значну (в цьому разі – це секунди і десятки годин) різномасштабність періодів, тобто що  $T_1 \gg T_2$ , то можна обґрунтувати, як це зроблено у праці [5], що можна виокремити достатню для гарантування статистичну репрезентативність відрізків з практично незмінним кардіоритмом, тобто розбиття добової тривалості  $T_2 = \bigcup_{j=1, N} D_j$  на сегменти

тривалостей  $D_j$ , на яких сигнал буде ПКВП з періодом корельованості  $T_j$ ,  $j = \overline{1, N}$ , де  $N$  – кількість таких сегментів. Тоді модель кардіосигналу набуде вигляду

$$x(t) = \sum_{k \in Z, j=1, N} c_{\Delta_j}(t) e^{i t \left( k \frac{2p}{T_1} + j \frac{2p}{T_2} \right)} z_{kj}(t) = \sum_{j=1, N} c_{\Delta_j}(t) V_j(t),$$

а  $V_j(t) = \sum_{k \in Z} e^{i k \frac{2p}{T_j}} z_{kj}(t)$  –  $j$ -й ПКВП періоду  $T_j$  на сегменті  $D_j : t \in D_j$ ,  $c_{\Delta_j}(t)$  – індикаторна

функція відрізка  $\Delta_j$ , і цим обґрунтовано, що коректно застосувати для опрацювання сигналу на сегментах  $D_j$  або контрольних вибірках із кардіосигналу методів уже апробованої статистики ПКВП. Зауважмо, що, визначаючи сегменти циркадного ритму, в цьому разі можна взяти до уваги тижневу, місячну та сезонну зміну його, а для полегшення інтерпретації доцільно скористатись відомою у радіофізиці концепцією биттів при накладанні коливань відносно близьких частот та аналогією амплітудної модуляції з перетворенням за принципом гетеродинування.

Теорія ритміки, названої свого часу [3] простою, яку тепер називають одноперіодною, ґрунтується на моделі у вигляді ПКВП. Вона привела до запровадження поліперіодно корельованих випадкових процесів поліПКВП [4] як загальної моделі багатоперіодної ритміки, але також до енергетичної концепції в теорії стохастичних сигналів. І тільки розвинута на її основі енергетична теорія (ЕТСС) [3] дала змогу завершити кореляційну теорію (інакше – теорію другого порядку) виокремленням двох по суті різних з погляду фізики випадкових процесів за скінченністю їхніх енергетичних характеристик – скінченної (повної) енергії (клас  $e$ ) та скінченної середньої (в часі) потужності (клас  $p$ ) та з'ясувати справжній сенс стаціонарності випадкового процесу як процесу зі скінченною (в кожен момент часу) інтенсивністю його значень і водночас виявити його місце в межах ЕТСС: клас стаціонарних процесів є підкласом процесів скінченної середньої потужності, але за термінологією, прийнятою у фізиків, досить виродженим, тобто таким, що “втратив” через некорельованість його гармонічних складових (а фактично фазових пов'язань їх) ряд характерних для процесів класу  $p$  властивостей. Щоб зрозуміти це, розгляньмо проблему опису кратної ритміки, коли береться до уваги специфічна сфазованість гармонічних складових процесу. Це дає змогу, крім випадковості (стохастичності) значень процесу, відобразити у його структурі повторність, притаманну реальному об'єктові, моделлю якого є цей процес, у відповідній повторності його ймовірнісних характеристик: у цьому разі – кореляційної функції (матсподівання є функцією детермінованою, випадковості не містить, тому його не розглядаємо).

Зокрема, в разі подвійної ритміки біПКВП як її модель природно трактується як відображення фізичного процесу модуляції, які можна розглядати тепер як суперпозицію гармонік близьких за величиною частот. Відмовившись від зручного для теоретичного аналізу запису гармонік за допомогою комплексних експонент і врахувавши, що на підставі ермітової симетрії кореляційної функції таку саму симетрію мають і комплексні амплітуди гармонік, і забезпечивши те, щоб значення процесу були дійсними (некомплексними) числами, гармоніки подаватимемо як косинус-функції.

Тоді дві гармоніки при накладанні (суперпозиції) даватимуть добре відомий фізикам образ биттів коливань, що відображає формула

$$\cos w_1 t + \cos w_2 t = 2 \cos \frac{w_1 + w_2}{2} t \cdot \cos \frac{w_1 - w_2}{2} t,$$

яка отримується зі знаного ще зі школи виразу суми тригонометричних функцій. Тут перший співмножник описує швидке коливання із середньою частотою  $1/2(w_1 + w_2)$ , а другий – повільну модуляцію амплітуди з максимумами, що виникають при частоті  $1/2(w_1 - w_2)t = np$ , тобто на частоті  $|w_1 - w_2|$ . Коли амплітуди коливань різні, глибина коливань зменшується, але зберігається частота биттів.

Використовуючи аналогію з биттям, можна біПКВП-модель інтерпретувати так, що нижчі гармоніки більшого періоду  $T_2$  дають загальну модуляцію, а вищі його гармоніки (частково

принаймні) впливають у сукупність гармонік меншого періоду  $T_1$ , об'єднуючи інтенсивності гармонік тієї самої частоти. З наведеної формули, яка виражає модуляцію через суми (суперпозицію) близьких (за умови значної різниці тривалості періодів;  $T_2 \gg T_1$ ) частот, випливає, що можна передати інтенсивності вищих гармонік періоду  $T_2$  настільки. Це дуже високі гармоніки періодів, навіть менших за  $T_1$ , можуть набути помітної інтенсивності, що може призвести до появи інтенсивної гармоніки, частоту якої можна трактувати як нову базову для першого ритму меншого періоду, тобто змінити його значення. Зрозуміло, що такий ефект має локальний характер і може проявитися на тих самих часових відрізках, на яких справедливе описане співвідношення інтенсивностей гармонічних складових біПКВП, а це істотно визначається відношенням тривалостей періодів  $T_1$  та  $T_2$ .

Як показано в роботі [5], поліритмічний процес (а саме з такими процесами доводиться стикатися під час дослідження реальних явищ) можна звести до процесу одного ритму з великим періодом корельованості за допомогою фільтрації або відліків, якщо потрібно досліджувати ритміку меншого періоду і фактично доводиться виділяти відрізки з наближено незмінною ритмікою. Оцінимо довжину такого відрізка в частковому випадку, а саме коли дисперсія біПКВП має вигляд  $s^2(t) = a(t)\sqrt{y(t)}$ , де  $a(t)$  – періодична функція з періодом  $T_1$ , а  $y(t)$  – періодична функція з періодом  $T_2 \gg T_1$ , тобто біПКВП є ПКВП з періодом корельованості  $T_1$ , модульований функцією  $\sqrt{y(t)}$ . Приймаючи, що  $y(t)$  – функція, яка повільно змінюється на інтервалі  $(t - \Delta/2, t + \Delta/2)$ , і відкидаючи члени вище другого порядку в ряді Тейлора, для середнього приросту дисперсії за рахунок модуляції аналогічно роботі [6] отримуємо вираз

$$\Delta_y s^2(t) = \frac{1}{\Delta} \int_{t-\Delta/2}^{t+\Delta/2} y(s) ds - y(t) \approx y''(t) \frac{\Delta^2}{24}.$$

Звідси для відносної похибки зміни знаходимо

$$d(t) = \frac{y''(t) \Delta^2}{y(t) 24}.$$

Задаючи допустиму похибку зміни  $a$ , з умови  $|s(\Delta)| \leq a$  визначаємо величину інтервалу  $\Delta$ , на якому біПКВП можна наближено розглядати як ПКВП меншого з періодів. Це значення знаходимо із трансцендентного рівняння

$$\frac{\Delta^2 y''(\Delta)}{24 y(\Delta)} \leq a.$$

Якщо  $y(t) = \cos \frac{2p}{T_2} t$ , то  $\Delta \leq \frac{\sqrt{6a}}{p} T_2$ , і, наприклад, при  $\alpha = 5\%$  отримуємо  $\Delta = 0,17T_2$ .

Якщо розглядати абсолютну зміну дисперсії, то з розкладу  $\cos x \approx 1 - x^2/2$  для відносної похибки одержимо  $d(t) = (2p/T_2)^2 t$ . Тому довжину відрізка біПКВП з наближеними сталими характеристиками визначимо з умови  $|d(\Delta/2)| \leq a$  і обчислимо за формулою  $\Delta \leq \frac{\sqrt{2a}}{p} T_2$ . Цю формулу можна використовувати для визначення параметрів циркадної ритміки фізіологічних процесів або, наприклад, добової ритміки геофізичних процесів, ускладненої місячними та іншими циклами.

### Висновок

Із наведених аргументів випливає, що врахування виразної різномасштабності періодів двоперіодної ритміки гарантує коректність застосування методів статистики періодично корельованих випадкових процесів для опрацювання вибірок із часового ряду більшого періоду як

сегментів ритміки меншого. У разі кардіосигналу такі методи можна використовувати для оцінювання змін стану серцево-судинної системи упродовж доби і кількох діб, як вимагає голтерівський моніторинг.

1. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов / Т. Андерсон; пер. с англ. – М.: Мир, 1976. – 755 с. 2. Баевский Р.М. Временная организация функций и адаптивно-приспособительная деятельность организма / Р.М. Баевский // Теоретические и прикладные аспекты анализа временной организации биосистем. – М.: Наука. – С. 88–111. 3. Войчишин К.С. О простой стохастической модели естественных ритмических процессов / К.С. Войчишин, Я.П. Драган // Отбор и передача информации, 1971. – Вып.29. – С.7–15. 4. Драган Я. Поліперіодично корельовані випадкові процеси як адекватні моделі сигналів кратної ритміки природних явищ і технологічних процесів / Я. Драган, П. Євтух, Л. Сікора, Б. Яворський // Комп'ютерні технології друкарства, 2000, № 1. – С.69–90. 5. Информационные связи био-гелио-геофизических явлений и элементы их прогноза / [К.С. Войчишин, Я.П. Драган, В.И. Куксенко, В.Н. Михайловский]. – К.: Наук. думка, 1974. – 208 с. 6. Драган Я.П. Ритмика морского волнения и подводные акустические сигналы / Я.П. Драган, И.Н. Яворский – К.: Наук. думка, 1982. – 246 с. 7. Драган Я.П. Енергетична теорія лінійних моделей стохастичних сигналів / Я.П. Драган. – Львів: Центр стратегічних досліджень еко-біотехнічних систем, 1997. – 361 с.

УДК 536.24

В. Гавриш, А. Косач

Національний університет “Львівська політехніка”,  
кафедра програмного забезпечення

## МОДЕЛЮВАННЯ ТЕПЛООВОГО СТАНУ В ТЕРМОЧУТЛИВОМУ ЕЛЕМЕНТІ ПОТУЖНОГО СВІТЛОДІОДА

© Гавриш В., Косач А., 2011

**Розглянуто стаціонарну нелінійну осесиметричну задачу теплопровідності для термочутливого шару, який нагрівається внутрішніми джерелами тепла і тепловим потоком. Отримано аналітичний розв'язок цієї задачі та виконано числовий аналіз для заданої залежності коефіцієнта теплопровідності матеріалу шару від температури.**

**Ключові слова:** температура, теплопровідність, стаціонарна, ізотропний, тепловий потік, термочутливий, осесиметрична.

**The steady state nonlinear axially symmetric problem of thermal conduction for the heat sensitive layer, which heats at internal thermal source and heat flow, has been considered. The analytical solution for this problem has been obtained and the numerical analysis for the given dependence of the layer substance thermal conductivity on the temperature has been conducted.**

**Keywords:** temperature, thermal conduction, steady state, isotropic, heat flow, heat sensitive, axially symmetric.

### Вступ

Останні досягнення у галузі світлотехніки вимагають розроблення та створення принципово нових джерел світла на основі потужних світлодіодів. Оскільки їхня ефективність є досить високою, то згодом вони замінять звичайні лампи розжарювання і застосовуватимуться для вуличного освітлення, автомобільної світлотехніки, рекламних вивісок, світлодіодних панелей, індикаторів, рухомих світлових рядків, світлофорів, декоративного освітлення, світлодинамічних