УДК 528.7

ВИЗНАЧЕННЯ ПЛОЩ ЗЕМЕЛЬНИХ ДІЛЯНОК У ГІРСЬКИХ РАЙОНАХ

Р. Рудий
Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу

Ключові слова: площа, поверхня, нахил, пересіченість.

Постановка проблеми

Визначення площі земельних ділянок у гірських районах для оцінки їхньої вартості може істотно відрізнятись від аналогічного процесу, наприклад, на дніпровських кручах. Пов'язано це з тим, що на похилій ділянці відповідної експозиції в гірській місцевості можна зібрати значно більше сіна чи випасати худоби, ніж на плоско-рівнинній, а в населеному пункті похила ділянка місцевості буде цінитись навіть менше ніж горизонтальна, оскільки на ній, наприклад, можна побудувати будівлю площею, що дорівнює горизонтальній проекції ділянки і ще з більшими витратами, ніж на відповідній горизонтальній ділянці. В статті буде наведено методику оцінки площі земельних ділянок у гірських районах зі значною пересіченістю рельєфу.

Теоретичні аспекти

Нехай поверхня певної ділянки землі подана як функція висот [3]

$$z = f(x, y)\,. \qquad (1)$$

Вважатимемо вказану функцію неперервною і визначеною в певній обмеженій області σ.

У цій області можна вибрати систему точок чи вузлів $M_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2, ...N$. Таку інформацію можна отримати за даними аерофотознімання чи іншого топографічного знімання. Опрацювавши її в пакеті SURFER, знаходять вказану систему вузлів, тобто greedfile.

Якщо область інтегрування буде прямокутною зі сторонами, паралельними до осей координат *x і y,* то можна записати:

$$D\{a \le x \le A; b \le y \le B\}\,.$$

Відтак необхідно знайти значення подвійного інтеграла у цій області

$$\iint_D f(x, y)\,dxdy\,.$$

Для цього використовують формули числових кубатур. Геометрично вказаний метод, як відомо [2], є еквівалентним обчисленню об'єму тіла, поверхня якого задана поперечними перерізами або профілями за допомогою вказаних вже вузлів *M.*

$$\sigma = \iint_D \sqrt{1 + (\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2}\,dxdy\,, \qquad (2)$$

де $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ – відповідні частинні похідні від функції z.

Вважаючи, що функція (1) є неперервною і має неперервні частинні похідні, для розв'язання задачі необхідно знайти ці частинні похідні. Тому (1) подають за допомогою інтерполяційного полінома для двох змінних.

Прямокутна сітка, якою задана функція z, подається так

$$\begin{aligned} & x = x_0 + ih; y = y_0 + jk. \\ & i, j = 0, 1, 2, ..., \qquad , \\ & p = \frac{(x - x_0)}{h}, q = \frac{(y - y_0)}{k} \end{aligned} \qquad (3)$$

де *h і k* – кроки сітки вздовж осей *x і y*, відповідно.

Інтерполяційний поліном матиме вигляд

$$\begin{aligned} & z = z_{00} + [p\Delta^{1+0}_{z_{00}} + q\Delta^{0+1}_{z_{00}}] + \tfrac{1}{2!}[p(p-1)\Delta^{2+0}_{z_{00}} + \\ & 2pq\Delta^{1+1}_{z_{00}} + q(q-1)\Delta^{0+2}_{z_{00}}] + \tfrac{1}{3!}[p(p-1)(p-2) \\ & \Delta^{3+0}_{z_{00}} + 3p(p-1)q\Delta^{2+1}_{z_{00}} + 3pq(q-1)\Delta^{1+2}_{z_{00}} + \\ & + q(q-1)(q-2)\Delta^{0+3}_{z_{00}}] + ... \end{aligned} \qquad (4)$$

де *p і q* – змінні, що введені замість *x і y*. Вони є кількістю кроків, які необхідно пройти від початку системи координат до заданої точки; Δ – змішані подвійні різниці, в яких перший верхній індекс означає порядок скінченної різниці вздовж осі *x*, а другий верхній індекс – вздовж осі *y*. Нижній індекс визначає точку, для якої виконується обчислення. В подальших викладках нижній індекс пропустимо.

З приведеної інтерполяційної функції знаходять частинні похідні

$$\begin{aligned} & \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}; \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{h}; \\ & \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial y}; \frac{\partial q}{\partial y} = \frac{1}{k}. \end{aligned} \qquad (5)$$

Отже, частинні похідні першого порядку є такими

$$\begin{aligned} & \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{h}[\Delta^{1+0} + \frac{1}{2}((2p-1)\Delta^{2+0} + 2q\Delta^{1+1}) + \\ & + \frac{1}{6}((6p^2 - 6p - 2)\Delta^{3+0} + (6pq - 3q)\Delta^{2+1} + \\ & + (3q^2 - 3q)\Delta^{1+2}) + ...] \\ & \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{k}[\Delta^{0+1} + \frac{1}{2}((2q-1)\Delta^{2+0} + 2p\Delta^{1+1}) + \\ & + \frac{1}{6}((6q^2 - 6q - 2)\Delta^{3+0} + (6pq - 3p)\Delta^{1+2} + \\ & + (3p^2 - 3p)\Delta^{2+1}) + ...] \end{aligned} \qquad (6)$$

Якщо в шуканих частинних похідних першого порядку обмежитись скінченними різницями першого порядку, то отримаємо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{h}\Delta^{1+0}; \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{k}\Delta^{0+1}. \qquad (7)$$

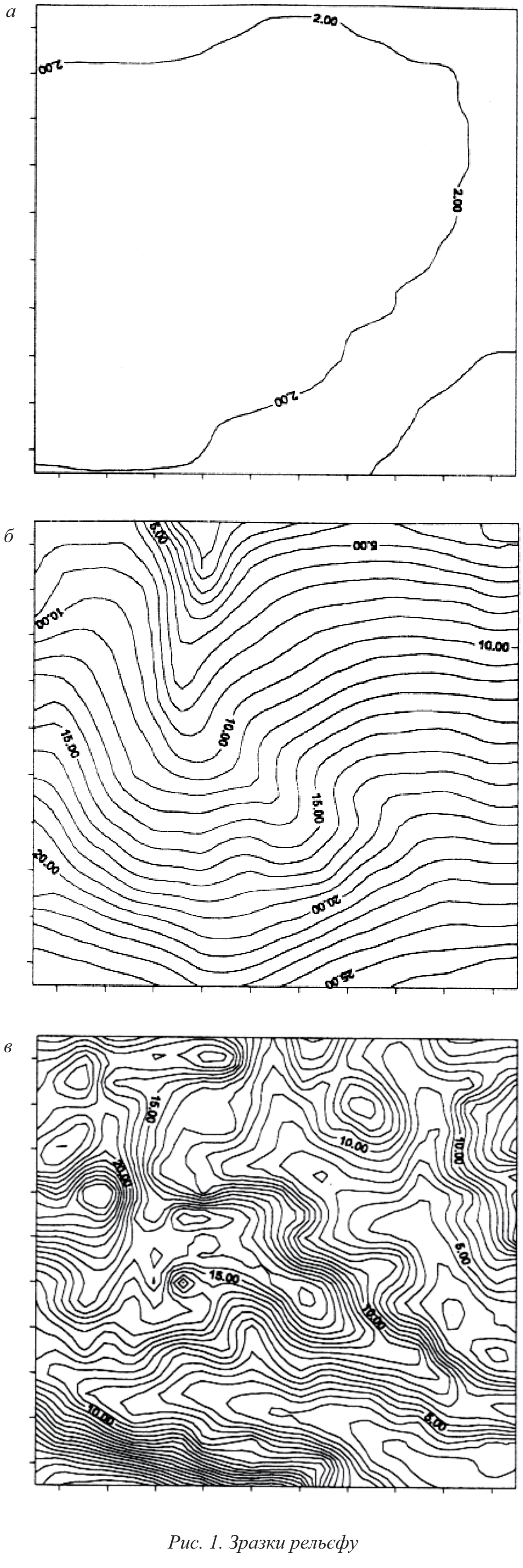

Рис. 1. Зразки рельєфу

$$m := \begin{pmatrix} 1.8 & 1.8 & 1.8 & 1.9 & 2 & 2.1 & 2 & 1.9 & 1.8 & 1.6 \\ 2.1 & 2.1 & 2.1 & 2.2 & 2.3 & 2.3 & 2.2 & 2.1 & 2.1 & 1.8 \\ 2.4 & 2.4 & 2.4 & 2.5 & 2.5 & 2.5 & 2.3 & 2.2 & 2.1 & 1.9 \\ 2.5 & 2.5 & 2.5 & 2.6 & 2.5 & 2.5 & 2.4 & 2.3 & 2.1 & 1.9 \\ 2.6 & 2.6 & 2.4 & 2.6 & 2.5 & 2.5 & 2.5 & 2.3 & 2.1 & 1.6 \\ 2.6 & 2.6 & 2.6 & 2.6 & 2.5 & 2.5 & 2.3 & 2.2 & 1.9 & 1.6 \\ 2.5 & 2.5 & 2.5 & 2.5 & 2.4 & 2.3 & 2.1 & 2 & 1.6 & 1 \\ 2.4 & 2.5 & 2.5 & 2.3 & 2.2 & 2.1 & 2 & 1.6 & 1.3 & 0.9 \\ 2.3 & 2.5 & 2.4 & 2.3 & 2.1 & 1.9 & 1.6 & 1.3 & 0.8 & 0.3 \\ 2.2 & 2.5 & 2.3 & 2 & 1.7 & 1.5 & 1.3 & 1 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix}$$

$$m := \begin{pmatrix} 7.9 & 7.9 & 6.4 & 0.3 & 3.7 & 4.8 & 5 & 5 & 4.6 & 3.8 \\ 9.1 & 9.7 & 8.4 & 2.4 & 5.9 & 7.1 & 7.5 & 7.7 & 7.5 & 6.6 \\ 11 & 10.8 & 8.8 & 6 & 7.6 & 8.8 & 9.7 & 10 & 9.8 & 9.4 \\ 13.2 & 11.6 & 9.3 & 7.7 & 9.4 & 10.5 & 11.8 & 12.5 & 12.5 & 12.2 \\ 15.3 & 12.5 & 10.5 & 9 & 11.4 & 12.7 & 14.2 & 14.9 & 15.2 & 14.4 \\ 16.5 & 13.5 & 11.5 & 10.7 & 11.5 & 14.2 & 16.4 & 17.2 & 17.4 & 16.7 \\ 18.2 & 15.2 & 13.6 & 13.5 & 14.4 & 14.2 & 16.4 & 18.9 & 19.5 & 19.1 \\ 19.9 & 18 & 16.4 & 16 & 17.1 & 16.8 & 18.8 & 20.5 & 21.7 & 21.5 \\ 22.2 & 21 & 20 & 19 & 19.2 & 20 & 21.8 & 23 & 23.8 & 23.7 \\ 24.3 & 23.7 & 23.1 & 21.6 & 21.8 & 23.3 & 24.6 & 25.5 & 25.6 & 26.5 \end{pmatrix}$$

$$m := \begin{pmatrix} 9 & 8 & 9.9 & 12.8 & 13.4 & 11 & 8.4 & 10.6 & 11.5 & 13.2 \\ 11.4 & 9.2 & 10 & 12.4 & 12.8 & 8.1 & 9 & 10 & 12 & 12.3 \\ 9.4 & 9.3 & 9.2 & 12.2 & 12.4 & 10 & 9.6 & 8 & 10 & 15 \\ 11.1 & 9.8 & 9.3 & 11.8 & 11.8 & 10.5 & 9 & 12.3 & 12 & 14 \\ 9.1 & 8.4 & 8.8 & 11.6 & 11 & 9.9 & 8.5 & 9.2 & 13.4 & 15 \\ 12 & 10.3 & 9 & 10.1 & 11 & 8 & 10 & 10.8 & 13.4 & 14.5 \\ 10.9 & 8.7 & 8.7 & 8.1 & 10.4 & 8.5 & 10 & 11.4 & 13.5 & 15.3 \\ 11 & 8.8 & 8.9 & 8.7 & 9.8 & 9.6 & 12.2 & 11 & 14.4 & 16 \\ 13.5 & 11.4 & 8.5 & 9.7 & 9.4 & 8.7 & 9.4 & 12.5 & 15.8 & 18 \\ 13.8 & 11.3 & 8 & 10.5 & 8.5 & 9.6 & 12.9 & 13.7 & 15 & 19.4 \end{pmatrix}$$

Рис. 2. Матриці висот зразків рельєфу

Розглянемо, як знаходять площу P регулярної поверхні S [1]. Вказану поверхню ділять на скінченну кількість частин. У кожній частині вибирають довільну точку і ортогонально проеціюють цю частину на дотичну площину до поверхні S у вибраній точці. Загальна площа поверхні буде границею суми площ отриманих у такий спосіб проекцій, коли розмір або діаметр найбільшої з розглянутих частин прямує до нуля

$$P = \lim_{diam \Delta\sigma i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta\sigma i \,. \qquad (8)$$

Експериментальні дослідження виконано на трьох зразках рельєфу земної поверхні, взятих з [3].

На першому зразку (а) наведена плоско-рівнинна поверхня, на другому (б) – нахилена, третьому (в) – горбиста.

На рис. 2 подано greedfile вказаних висот рельєфу. Вони задані матрицею 10x10. Тобто розмір ділянки – 9x9 умовно взятих одиниць розміру. Якщо, наприклад, взяти розмір клітини сітки 10 м, то площа горизонтальної проекції кожної з ділянок буде 8100 м^2.

Обчислення площ виконувалось в пакеті Mathcad за формулою

$$s := \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=0}^{n-1} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{m_{i+1,\,j+1} - m_{i+1,\,j}}{dm} \right)^2 + \left(\frac{m_{i+1,\,j+1} - m_{i,\,j+1}}{dn} \right)^2} \cdot dm \cdot dn \right],$$

де $m_{i,j}$ – елементи матриці, *dm, dn* – розміри сітки *k, n* – номери елементів матриці вздовж осей *x* і *y* – відповідно.

Для наведених трьох ділянок земної поверхні отримано такі значення площі. Для першого зразка (а), в якому перепад висот становить близько 1,5 одиниць висоти, $P = 8104$.

Для другого зразка (б), де перепад висот найбільший, приблизно 21, $P = 8402$. Для третього зразка (в), де перепад висот менший, ніж в другому зразку, тобто близько 11 одиниць висоти чи метрів, $P = 9386$.

Висновки

Отже, залежно від складності рельєфу, його пересіченості збільшується відповідно площа поверхні ділянки. Величина цього збільшення обчислена з використанням наведених математичних залежностей. Отримані результати експериментальних обчислень підтвердили правильність математичного апарату і загальних міркувань, тому запропоновану методику можна практично використовувати в різних галузях. Зацікавлення може викликати точність оцінювання площі поверхні ділянки, яка визначається розмірами елемента сітки і яку можна розрахувати.

Література

1. Корн Г. Справочник по математике / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1970. – 720 с.
2. Вычислительные методы / Крылов В.И. и др. – М.: Наука, 1976. – 303 с.
3. Рудий Р.М. Методи дослідження рельєфу земної поверхні / Р.М. Рудий. – Дис. д-ра техн. наук. – Львів, 1999. – 375 с.

Визначення площ земельних ділянок у гірських районах
Р. Рудий

Проаналізовано визначення площ земельних ділянок залежно від складності та пересіченості рельєфу. Пропонується математичний апарат для визначення площ.

Определение площадей земельных участков в горных районах
Р. Рудый

Рассмотрен анализ определения площадей земельных участков в зависимости от сложности и пересеченности рельефа. Предложены формулы для определения площадей.

The area determination of the land plots in the mountain regions
R. Rudy

The analysis of the land plots determinations depends of their relief intersections and complications are considered. The formulas of the area calculation are offered.