УДК 528.48

ВПЛИВ ЗМІНИ ПОЛОЖЕННЯ П'ЯТКИ РЕЙКИ НА ТОЧНІСТЬ ВИСОКОТОЧНОГО НІВЕЛЮВАННЯ

І. Тревого
Національний університет "Львівська політехніка"

Є. Ільків, Ю. Ткаченко
Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу

Ключові слова: перевищення, п'ятка рейки, високоточне нівелювання.

Постановка проблеми

Високоточне нівелювання є одним з основних методів створення Державної геодезичної мережі, а також опорних висотних мереж для контролю стійкості інженерних об'єктів. Точність такого нівелювання повинна бути якомога вищою за високої оперативності вимірів з їх контролем. Тому будь-які способи підвищення точності, оперативності і надійності контролю високоточного нівелювання мають важливе значення.

Аналіз останніх досліджень та публікацій, які стосуються вирішення цієї проблеми

Під час високоточного нівелювання для підвищення контрольованості вимірів у роботі [1] запропоновано змінювати висоту нівеліра. Такий підхід значно ускладнює процес нівелювання. Тому в статті [2] запропоновано змінювати не висоту нівеліра, а положення п'ятки рейки. У розробці [3] виконано оцінку точності вимірів з урахуванням додаткової величини – переміщення п'ятки рейки. Оцінка виконана для випадку нівелювання однією рейкою.

Невирішені проблеми полягають у тому, що відсутня оцінка впливу зміни положення п'яток на точність визначення перевищення з використанням двох рейок.

Постановка проблеми – оцінити вплив урахування величин переміщень п'яток рейок на точність визначення перевищення на станції.

Виклад основного матеріалу проблеми

Порядок взяття відліків зі зміною положення п'яток рейок вказано в табл. 1.

Таблиця 1

Програма спостережень зі зміною положення п'яток рейок

Відліки на рейці			
задня		передня	
основна шкала	додаткова шкала	основна шкала	додаткова шкала
y_1 (1)	y_2 (2)	y_3 (3)	y_4 (4)
y_7^{**} (7)	y_8^{**} (8)	y_5^{*} (5)	y_6^{*} (6)

У табл. 1 y^*, y^{**} – відліки після зміщення п'ятки передньої і задньої рейок, відповідно. Порядок взяття відліків вказано в дужках. Величини зміщень позначимо так – y_9 (для задньої рейки), y_{10} (для передньої рейки).

Особливістю такої методики спостережень є корельованість перевищень, які можна утворити на основі цих відліків

$$
\begin{aligned}
h_1 &= y_1 - y_3 \\
h_2 &= y_2 - y_4 \\
h_3 &= y_1 - y_5^* + y_{10} \\
h_4 &= y_2 - y_6^* + y_{10} \\
h_5 &= y_7^{**} - y_5^* - y_9 + y_{10} \\
h_6 &= y_8^{**} - y_6^* - y_9 + y_{10}.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Виникає задача урівнювання багаторазових корельованих вимірів однієї величини. При цьому рівняння поправок мають вигляд

$$V = A\delta h + L , \tag{2}$$

а нормальне рівняння

$$V = A\delta h + L , \tag{3}$$

де $R = A^{\mathrm{T}} P_h A,\ b = A^{\mathrm{T}} P_h L$.

Розглянемо два варіанти спостережень

Варіант 1. Зміщується тільки п'ятка передньої рейки. У цьому випадку вектори коефіцієнтів та вільних членів рівнянь поправок мають вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{pmatrix}, l_j = h^0 - h_j, h^0 = h_1 . \tag{4}$$

Якщо вважати, що всі y_i незалежні, то коваріаційна матриця K_y буде діагональною. Позначимо дисперсії для відліків на рейці

$$\sigma_{y_i}^2 = \sigma_0^2 , \tag{5}$$

і для величин зміщення п'ятки

$$\sigma^2 = c\sigma_0^2 , \tag{6}$$

де σ_0^2 – дисперсія помилки одиниці ваги.

Знайдемо матрицю ваг P_h. Коваріаційна матриця K_y матиме на головній діагоналі вектор (1,1,1,1,1,1,c). Відповідно до узагальненої теореми оцінки точності

$$K_h = BK_y B^{\mathrm{T}} , \tag{7}$$

де

$$B = \left(\frac{\partial h_j}{\partial y_i} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

У результаті для (7) отримаємо

$$K_h = \sigma_0^2 Q_h = \sigma_0^2 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2+c & c \\ 0 & 1 & c & 2+c \end{pmatrix}; \qquad (8)$$

$$P_h = Q_h^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} E+\frac{1}{2}N & -N \\ -N & 2N \end{pmatrix}, \qquad (9)$$

де

$$N = \frac{4}{9+12c}\begin{pmatrix} 3/2+c & -c \\ -c & 3/2+c \end{pmatrix};$$

E – одинична матриця.

Розглянемо два випадки:

1) Величина зміщення нулів визначена безпомилково (c=0). Тоді

$$P_h = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \qquad (10)$$

Коефіцієнт нормального рівняння дорівнює

$$R = A^{\mathrm{T}} P_h A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot P_h \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \Sigma_p = \frac{4}{3}. \qquad (11)$$

Тобто Σ_p – сума всіх елементів матриці P_h. Вільний член нормального рівняння

$$b = A^{\mathrm{T}} P_h L = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{4} l_j .$$

Розв’язок нормального рівняння (3)

$$\delta h = -\frac{b}{R} = -\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{4} l_j . \qquad (12)$$

Урівняне значення перевищення є узагальненою арифметичною серединою

$$\bar{h} = h^0 + \delta h = \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{4} h_j \qquad (13)$$

з вагою

$$P_{\bar{h}} = \Sigma_p = \frac{4}{3}. \qquad (14)$$

Тобто теоретично перевищення, знайдене за цією методикою, визначається з точністю

$$\sigma_0 \sqrt{\frac{3}{4}} .$$

Середні квадратичні помилки за результатами урівнювання обчислюємо згідно з формулами

$$\mu = \left(\frac{1}{3} V^{\mathrm{T}} P_h V\right)^{\frac{1}{2}}; \qquad (15)$$

$$m_{\bar{h}} = \frac{\mu}{\sqrt{\Sigma_p}} = \left(\frac{1}{4} V^{\mathrm{T}} P_h V\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (16)$$

За допомогою наведеної нижче формули можна контролювати обчислення $V^{\mathrm{T}} P_h V$

$$V^{\mathrm{T}} P_h V = h^{\mathrm{T}} P_h h - \left[\sum_{j=1}^{4} \left(\Sigma_p\right)_j h_j\right]^2 \Big/ \Sigma_p , \qquad (17)$$

де $\left(\Sigma_p\right)_j$ – сума ваг у j – стовпці матриці P_h.

Точність цієї методики порівняно з традиційною, коли перевищення визначають при двох горизонтах, оцінимо за допомогою співвідношення

$$m_{\bar{h}} = \sqrt{\frac{p}{p_{\bar{h}}}} m , \qquad (18)$$

де p і m – відповідно, вага і с.к.п. перевищення за традиційною методикою. Як буде показано нижче, p =2. У результаті отримаємо

$$m_{\bar{h}} = 1,225m , \qquad (19)$$

тобто точність за цією методикою знижується на 25 % порівняно з традиційною.

2) Величина зміщення нулів визначена рівноточно з відліками y_i. Матриця ваг у цьому разі буде такою (c=1)

$$P_h = \frac{1}{21}\begin{pmatrix} 13 & -1 & -5 & 2 \\ -1 & 13 & 2 & -5 \\ -5 & 2 & 10 & -4 \\ 2 & -5 & -4 & 10 \end{pmatrix}. \qquad (20)$$

Знайдемо коефіцієнт і вільний член нормального рівняння

$$R = A^{\mathrm{T}} P_h A = \Sigma_p = \frac{8}{7}; \qquad (21)$$

$$b = A^{\mathrm{T}} P_h L = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{3}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix} L . \qquad (22)$$

Розв’язок нормального рівняння буде таким

$$\delta h = -\frac{b}{R} = -\frac{3}{8}(l_1 + l_2) - \frac{1}{8}(l_3 + l_4)$$

Узагальнене середнє вагове становитиме

$$\bar{h} = h^0 - \frac{b}{R} = \frac{3}{8}\left(h_1 + h_2\right) + \frac{1}{8}\left(h_3 + h_4\right), \qquad (23)$$

а вага

$$P_{\bar{h}} = \Sigma_p = \frac{8}{7}, \qquad (24)$$

і середня квадратична помилка

$$m_{\bar{h}} = \left(\frac{7}{24} V^{\mathrm{T}} P_h V\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (25)$$

Остання пов’язана таким співвідношенням з середньою квадратичною помилкою нівелювання при двох горизонтах

$$m_{\bar{h}} = 1,323m , \qquad (26)$$

що означає зниження точності на одну третю.

Варіант 2. Спостереження ведуть за повною програмою: вісім відліків на рейках і величини y_9, y_{10} зміщення нулів рейки з послідовністю, яка відповідає системі (1). Коваріаційна матриця K_h в цьому випадку має вигляд

$$K_h = \sigma_0^2 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2+c & c & 1+c & c \\ 0 & 1 & c & 2+c & c & 1+c \\ 0 & 0 & 1+c & c & 2+2c & 2c \\ 0 & 0 & c & 1+c & 2c & 2+2c \end{pmatrix} \quad (27)$$

Розглянемо часткові випадки K_h.

1) Якщо c=0, тобто безпомилкових зміщень нулів y_9, y_{10}

$$K_h = \sigma_0^2 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad (28)$$

а матриця ваг

$$P_h = Q_h^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 4 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 4 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \quad (29)$$

$$\left(\Sigma_p\right)_j = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

Коефіцієнт і вільний член нормального рівняння дорівнюють

$$\begin{aligned} R &= A^{\mathrm{T}} P_h A = \Sigma_p = 2 \\ -b &= A^{\mathrm{T}} P_h h = \frac{1}{2}\left(h_1 + h_2 + h_5 + h_6\right) \end{aligned} \quad (30)$$

Узагальнене середнє вагове становитиме

$$\bar{h} = \left(\sum_{j=1}^{6} \left(\Sigma_p\right)_j h_j \right) \Big/ \Sigma_p = \frac{1}{4}\left(h_1 + h_2 + h_5 + h_6\right), \quad (31)$$

а його вага

$$P_{\bar{h}} = \Sigma_p = 2 \quad (32)$$

і середня квадратична помилка

$$m_{\bar{h}} = \left(\frac{1}{6} V^{\mathrm{T}} P_h V \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (33)$$

2) Якщо c=1

$$K_h = \sigma_0^2 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad (34)$$

$$P_h = Q_h^{-1} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 11 & -1 & -6 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & 11 & 2 & -6 & -1 & 3 \\ -6 & 2 & 12 & -4 & -6 & 2 \\ 2 & -6 & -4 & 12 & 2 & -6 \\ 3 & -1 & -6 & 2 & 25/3 & -11/3 \\ -1 & 3 & 2 & -6 & -11/3 & 25/3 \end{pmatrix} \quad (35)$$

$$\left(\Sigma_p\right)_j = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}$$

Загальна сума ваг буде

$$\Sigma_p = \sum_{j=1}^{6} \left(\Sigma_p\right)_j = \frac{4}{3}. \quad (36)$$

Коефіцієнт і вільний член нормального рівняння

$$\begin{aligned} R &= A^{\mathrm{T}} P_h A = \Sigma_p = \frac{4}{3} \\ -b &= A^{\mathrm{T}} P_h h = \frac{1}{2}\left(h_1 + h_2\right) + \frac{1}{6}\left(h_5 + h_6\right) \end{aligned} \quad (37)$$

Узагальнене середнє вагове дорівнює

$$\bar{h} = \left(\sum_{j=1}^{6} \left(\Sigma_p\right)_j h_j \right) \Big/ \Sigma_p = \frac{3}{8}\left(h_1 + h_2\right) + \frac{1}{8}\left(h_5 + h_6\right) \quad (38)$$

його вага

$$P_{\bar{h}} = \Sigma_p = \frac{4}{3} \quad (39)$$

і середня квадратична помилка

$$m_{\bar{h}} = \left(\frac{1}{4} V^{\mathrm{T}} P_h V \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (40)$$

Отримані результати свідчать, що під час спостережень за повною програмою обчислювати перевищення h_3 і h_4 є зайвим (їх ваги дорівнюють нулю).

Щоб підтвердити цей факт, виконаємо розрахунки для перевищень

$$\begin{aligned} h_1 &= y_1 - y_3 \\ h_2 &= y_2 - y_4 \\ h_5 &= y_7 - y_5 + y_{10} - y_9 \\ h_6 &= y_8 - y_6 + y_{10} - y_9, \end{aligned} \quad (41)$$

де перевищення

$$\begin{aligned} h_3 &= \left(y_1 - y_5 + y_{10}\right) \\ h_4 &= \left(y_2 - y_6 + y_{10}\right) \end{aligned}$$

вилучені з подальшої обробки. Кореляційна матриця для перевищень (41) є такою

$$K_h = \sigma_0^2 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2c+2 & 2c \\ 0 & 0 & 2c & 2c+2 \end{pmatrix}. \quad (42)$$

Якщо c=0, що відповідає випадку рівноточних і некорельованих перевищень, отримаємо

$$K_h = \sigma_0^2 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2\sigma_0^2 E,$$

$$P_h = Q_h^{-1} = \frac{1}{2}E,$$

$$R = A^{\mathrm{T}} P_h A = 2,$$

$$-b = A^{\mathrm{T}} P_h h = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{4} h_j, \tag{43}$$

$$\overline{h} = \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{4} h_j,$$

$$P_{\overline{h}} = \Sigma_p = 2,$$

$$m_{\overline{h}} = m.$$

Остання рівність показує, що спостереження за цією програмою і визначені зміщення п'яток рейок ($c \cong 0$) не призводять до втрати точності, якщо порівнювати її з нівелюванням при двох горизонтах.

Якщо c=1, отримаємо

$$K_h = \sigma_0^2 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \tag{44}$$

$$P_h = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \tag{45}$$

$$R = A^{\mathrm{T}} P_h A = \frac{4}{3} \tag{46}$$

$$-b = A^{\mathrm{T}} P_h h = \frac{1}{2}\left(h_1 + h_2\right) + \frac{1}{6}\left(h_3 + h_4\right) \tag{47}$$

$$\overline{h} = \frac{3}{8}\left(h_1 + h_2\right) + \frac{1}{8}\left(h_3 + h_4\right) \tag{48}$$

$$p_{\overline{h}} = \frac{4}{3} \tag{49}$$

$$m_{\overline{h}} = \left(\frac{1}{4} V^{\mathrm{T}} P_h V\right)^{\frac{1}{2}} \tag{50}$$

$$m_{\overline{h}} = 1,225m, \tag{51}$$

що означає точність меншу, на 25 %, ніж точність при двох горизонтах інструмента. Але, якщо точність визначення зміщення п'яток рейок буде вдвічі вищою, ніж взяття відліку, то співвідношення (51) буде таким

$$m_{\overline{h}} = 1,095m, \tag{52}$$

що означає втрату точності тільки на 9,5 %.

Висновки

1. Наші дослідження доводять, що нівелювання при двох горизонтах нівеліра можна замінити технологічно простішою методикою з використанням програми спостережень зі зміною положення п'яток рейок.

2. Найефективнішою методикою є одночасна зміна п'яток обох рейок і лише після цього взяття повторних відліків на рейках.

3. Практично для того, щоб не допустити втрати точності визначення перевищення на станції за вказаною методикою, необхідно визначати зміщення п'яток рейок у три-чотири рази точніше, ніж взяття відліків на рейці.

Література

1. Измерение вертикальных смещений сооружений и анализ устойчивости реперов / В.Н. Ганьшин, А.Ф. Стороженко, А.Г. Ильин и др. – М.: Недра, 1981. – 215 с.
2. Илькив Е.Ю. Опыт нивелирования при наблюдении за осадками сооружений / Е.Ю. Илькив // Геодезия и картография. – 1987. – № 7. – С. 21–22.
3. Илькив Е.Ю. О дополнительных измерениях на станции при нивелировании короткими лучами Деп. в УкрНИИНТИ 30.03.88, № 770. Ук-88. – 4 с.

Вплив зміни положення п'ятки рейки на точність високоточного нівелювання

І. Тревого, Є. Ільків, Ю. Ткаченко

Виконано дослідження, що дають змогу оцінити вплив зміни положення п'яток рейок на точність визначення перевищення на станції під час високоточного нівелювання. Доведено, що величини зміщення п'яток рейок, щоб не допустити втрати точності визначення перевищення на станції за вказаною методикою, необхідно визначати в три-чотири рази точніше, ніж взяття відліків на рейці.

Влияние изменения положения пятки рейки на точность высокоточного нивелирования

И. Тревого, Е. Илькив, Ю. Ткаченко

Выполнены исследования для оценки влияния изменения положения пяток реек на точность определения превышения на станции при высокоточном нивелировании. Доказано, что величины смещения пяток реек, для сохранения точности определения превышения на станции по предложенной методике, необходимо определять в три-четыре раза точнее, чем взятие отсчетов по рейке.

The effect of changing position the heel staff on accuracy of precise leveling

I. Trevoho, Je. Ilkiv, Ju. Tkachenko

The investigation to assess the impact of change in position heel staffs on the accuracy of determining the excess on the station at precise leveling was performed. It is proved that the value of dislocation heel staffs, must be established for three to four times more accurate than reading rod, to prevent loss of accuracy of determining the excess on the station by this method.