

1. Драган Я.П., Медиковський М.О., Овсяк В.К., Сікора Л.С., Яворський Б.І. Системний аналіз концепції та принципів побудови математичної моделі досліджуваного об'єкта в фізико-технічних науках та оцінювання її якості // Вісник Нац. ун-ту «Львівська політехніка»: “Комп’ютерні науки та інформаційні технології”, 2010, № 686. – С.170–179. 2. Dragan Y.P. Energetic concept in the theory of nonstationary stochastic signals : representations, transformations, statistical estimations // Latvian signal processing international conference: Proc. V.1– Riga: Zinatne, 1990. –P.32–36. 3. Драган Я.П. Математичне й алгоритмічно-програмне забезпечення комп’ютерних засобів статистичного опрацювання стохастичних коливань (ритмічних процесів) // Вісник Нац. ун-ту «Львівська політехніка»: “Інформаційні системи та мережі”, 2008, № 621. – С.124–130. 4. Драган Я.П., Сікора Л.С., Яворський Б.І. Основи сучасної теорії стохастичних сигналів: енергетична концепція, математичний апарат, фізичне тлумачення. – Львів: Центр стратегічних досліджень еко-біо-технічних систем, 1999. – 133 с. 5. Драган Я. Енергетична теорія лінійних моделей стохастичних сигналів. – Львів: Центр стратегічних досліджень еко-біо-технічних систем, 1997. – 361 с. 6. Информационные связи био-гелио-геофизических явлений и элементы их прогноза / Войчишин К.С., Драган Я.П., Куксенко В.И, Михайловский В.Н. – К.: Наукова думка, 1983. – 366 с. 7. Драган Я.П. Ранг векторного стационарного случайного процесса и его структура // Отбор и передача информации. – 1986, № 74. – С.3–6. 8.Справочник по теории вероятностей и математической статистике / ред. Королюк В.С. – К.: Наукова думка, 1978. – 582 с. 9. Слуцкий Е.С.Сложение случайных причин как источник циклических процессов // Е. Слуцкий. Визнання. Творча спадщина з погляду сучасності. – К.: Знання, 2007. – 919 с. – С.703–755.

УДК 621.39

Я. Соколовський, В. Шиманський
Національний лісотехнічний університет України

ФРАКТАЛЬНА МОДЕЛЬ ТЕПЛО- ТА МАСОПЕРЕНОСЕННЯ У КАПІЛЯРНО-ПОРИСТИХ МАТЕРІАЛАХ

© Соколовський Я., Шиманський В., 2011

Розглянуто фрактальну модель тепло- та масоперенесення у капілярно-пористих матеріалах, що описується системою диференціальних рівнянь у частинних похідних з дробовим порядком. Різницевим методом отримано числовий розв’язок задачі для різних значень дробової похідної.

Ключові слова: похідна дробового порядку, фрактальна, масоперенесення, капілярно-пористий, числовий метод.

There was considered fractal model of heat and mass transfer in capillary-porous materials which is described by the system of differential equations in partial derivatives with fractional order. The difference method receives the numerical decision of a problem at various orders of a fractional derivative.

Ключові слова: fractional order derivative, fractal, mass transfer, capillary-porous, numerical method.

Вступ

Безліч питань, пов'язаних з природою релаксації сильнонерівноважних процесів до стану рівноваги, викликають значний практичний інтерес. До нерівноважних процесів належать процеси тепло- та масоперенесення в процесі сушіння деревини. Особливістю нерівноважних процесів у середовищах з фрактальною структурою є повільна релаксація кореляційних зв'язків, коли багаточастинні функції розподілу не розпадаються на добуток одночасткових функцій розподілу. Зокрема, можуть існувати нерівноважні стаціонарні стани, коли система в розглянутій задачі в принципі не досягає рівноважного стану. Все це призводить до того, що традиційні методи

«скороченого» опису в статистичній фізиці стають непридатними для дослідження властивостей систем з фрактальною структурою.

Особливість фізичних систем з фрактальною структурою полягає в тому, що для них істотні такі властивості, як: “пам'ять”, складна природа просторових кореляцій та ефекти самоорганізації. Створення адекватних математичних моделей для систем, у яких проявляються властивості самоорганізації, детермінованого хаосу, також вимагає залучення нетрадиційних підходів, оснований на застосуванні математичного апарату диференціальних рівнянь дробового порядку. Системи, які можна описати рівняннями в дробових похідних, повинні містити канали, що входять до складу розгалуженої фрактальної структури. Показник дробової похідної за часом відповідає частці каналів (гілок), відкритих для протікання.

Аналіз літератури [1–4, 10–12] свідчить про те, що аналітичні методи розв'язання рівнянь дробової дифузії виявляються малоефективними, а теорія числових методів їх розв'язання має фрагментарний характер і далека від завершення.

У цій роботі використано числовий метод предиктор-коректор для знаходження розв'язку системи диференціальних рівнянь з частинними похідними дробового порядку.

Постановка задачі

Фрактальна модель тепло- та масоперенесення у капілярно-пористих матеріалах описується системою диференціальних рівнянь у частинних похідних з дробовим порядком

$$\begin{cases} c\rho \frac{\partial^\alpha T}{\partial \tau^\alpha} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \varepsilon \rho_0 r \frac{\partial^\alpha u}{\partial \tau^\alpha} \\ \frac{\partial^\alpha u}{\partial \tau^\alpha} = a_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_1 \delta \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \end{cases} \quad (1)$$

і відповідними початковими умовами

$$\begin{cases} T|_{\tau=0} = T_0(x) \\ u|_{\tau=0} = u_0(x) \end{cases} \quad (2)$$

та граничними умовами третього роду

$$\begin{cases} \lambda \frac{\partial T}{\partial n} + \rho_0(1-\varepsilon)\beta(u-u_p) = a_2(T-t_c) \\ a_1 \delta \frac{\partial T}{\partial n} + a_1 \frac{\partial u}{\partial n} = \beta(u-u_p) \end{cases} \quad (3)$$

де u – вологовміст; t – час; λ – коефіцієнт теплопровідності; a_1 – коефіцієнт вологопровідності; n – зовнішня нормаль; a_2 – коефіцієнт теплообміну; β – коефіцієнт вологообміну; u_p – рівноважний вологовміст, що є функцією від температури середовища t_c та відносної вологості зовнішнього середовища φ ; c – питома теплоємність; ρ – густина; ρ_0 – базисна густина; ε – коефіцієнт фазового переходу; r – питома теплота пароутворення; δ – термоградієнтний коефіцієнт; α – дробовий порядок похідної (характеризує частку каналів, відкритих для протікання).

Параметр $0 < \alpha < 2$. Можна визначити два типи дифузії. Субдифузія характеризується значенням параметра $0 < \alpha < 1$, супердифузія $-1 < \alpha < 2$. У субдифузії частинки рухаються повільніше, у супердифузії швидше, ніж у звичайній дифузії ($\alpha = 1$) [10–12].

Числовий метод розв'язання диференціальних рівнянь з похідними дробового порядку

Розглянемо систему диференціальних рівнянь у частинних похідних дробового порядку, що описують процес тепло- та масоперенесення у середовищах з фрактальною структурою, що має вигляд (1). Приймається, що дробова похідна порядку α на відрізку $[\tau^n; \tau^{n+1}]$ є похідною Рімана–Ліувілля:

$$\left. \frac{\partial^\alpha f}{\partial \tau^\alpha} \right|_{\tau^n} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{u(\tau^n)}{(\tau^{n+1} - \tau^n)^\alpha} + \int_{\tau^n}^{\tau^{n+1}} \frac{u'(\xi)}{(\tau^{n+1} - \tau^n)^\alpha} d\xi \right], \quad (4)$$

де $\Gamma(\alpha)$ – гамма-функція;

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx,$$

n – індекс відповідного часового інтервалу $[\tau^n; \tau^{n+1}]$.

Подемо похідну $f'(\xi)$ на відрізку $[\tau^n; \tau^{n+1}]$ у вигляді скінченної різниці:

$$\frac{df}{d\tau} \approx \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta\tau} (\Delta\tau = \tau^{n+1} - \tau^n)$$

Запишемо різницеву апроксимацію похідної дробового порядку α на відрізку $[\tau^n; \tau^{n+1}]$ у такому вигляді:

$$\left. \frac{\partial^\alpha f}{\partial \tau^\alpha} \right|_{\tau^n} = \frac{u^{n+1} - \alpha u^n}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)\Delta\tau^\alpha} \quad (5)$$

Звідси явна різницєва схема для системи диференціальних рівнянь (1) з дробовою похідною порядку α ($0 < \alpha < 1$) набуде вигляду:

$$\begin{cases} c\rho \frac{T_i^{n+1} - \alpha T_i^n}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)\Delta\tau^\alpha} = \lambda \frac{T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n}{h^2} + \varepsilon\rho_0 r \frac{u_i^{n+1} - \alpha u_i^n}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)\Delta\tau^\alpha} \\ \frac{u_i^{n+1} - \alpha u_i^n}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)\Delta\tau^\alpha} = a_1 \frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{h^2} + a_1 \delta \frac{T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n}{h^2} \end{cases} \quad (6)$$

де $h = x_{i+1} - x_i$.

Неявна схема буде такою:

$$\begin{cases} c\rho \frac{T_i^{n+1} - \alpha T_i^n}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)\Delta\tau^\alpha} = \lambda \frac{T_{i-1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i+1}^{n+1}}{h^2} + \varepsilon\rho_0 r \frac{u_i^{n+1} - \alpha u_i^n}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)\Delta\tau^\alpha} \\ \frac{u_i^{n+1} - \alpha u_i^n}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)\Delta\tau^\alpha} = a_1 \frac{u_{i-1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i+1}^{n+1}}{h^2} + a_1 \delta \frac{T_{i-1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i+1}^{n+1}}{h^2} \end{cases} \quad (7)$$

Щоб знайти числовий розв'язок задачі (1)–(3), використано метод предиктор-коректор [7]. Як предиктор використовували метод, оснований на явній різницєві схемі (6), а як коректор – на неявній (7).

Отримані результати

Числовий експеримент визначення розподілу вологості та температури у процесі сушіння деревини на основі наведеного алгоритму реалізації фізико-математичної моделі (1)–(3) наведемо для сосни з початковим значенням вологовмісту $u_0 = 0.4$ кг/кг, температури $T_0 = 20$ °C, з температурою середовища $t_c = 70$ °C та такими умовами процесу сушіння деревини: $\varphi = 60$ %, $v = 2$ м/с (φ, v – відповідно відносна вологість та швидкість агента сушіння).

На рис. 1, 2 відповідно наведено розподіл вологи та температури у центрі зразка залежно від часу, якщо порядки дробової похідної дорівнюють $\alpha = 1$, $\alpha = 0.95$ та $\alpha = 9$. Розподіл вологи розглядається за перші 90 год сушіння, ширина зразка – 7 см.

На рис. 3, 4 відповідно наведено розподіл вологи та температури на зразку залежно від часу, коли порядок дробової похідної – $\alpha = 0.9$.

Розподіл вологості в центрі зразка

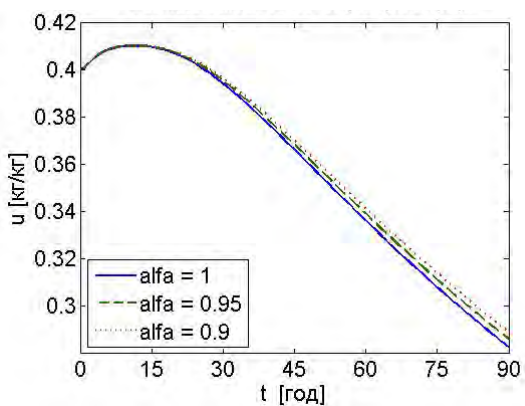


Рис. 1

Розподіл температури в центрі зразка

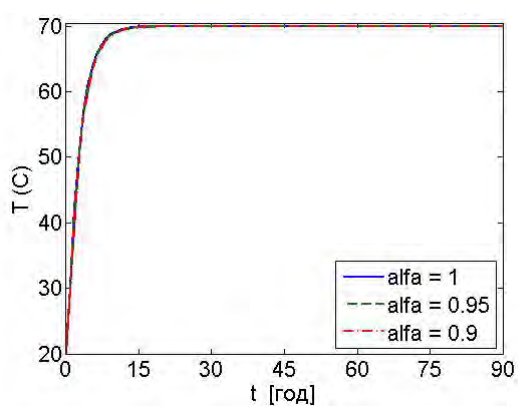


Рис. 2

Розподіл вологості

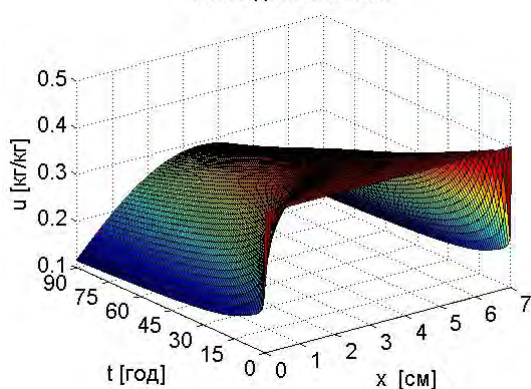


Рис. 3

Розподіл температури

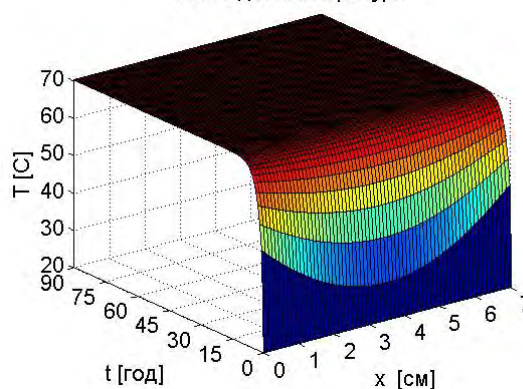


Рис. 4

Аналіз графіків на рис. 3, 4 та графічних залежностей на рис. 1, 2 свідчить про інтенсивніше вологовиділення у процесі зростання температури зразка. З цих графіків також видно, що значення вологовмісту на границі зразка зменшується швидше ніж у його центрі, а температури – відповідно на границі зростає швидше ніж у центрі зразка. Ці результати також є зрозумілими на інтуїтивному рівні, адже якщо помістити взірєць у сушильну камеру, то природно, що він зовні висохне та прогріється швидше, аніж всередині.

Як відомо, деревина є капілярно-пористим матеріалом з фрактальною структурою. Зважаючи на це, потрібно більше уваги приділяти аномальності процесу масоперенесення у таких матеріалах, а саме наявності процесу субдифузії. Ця аномальність описується системою диференціальних рівнянь у частинних похідних з дробовим порядком. Проаналізувавши отримані результати числового експерименту та порівнявши графіки на рис. 1, 2, доходимо висновку, що зі зменшенням порядку дробової похідної спостерігається явище сповільнення процесу масоперенесення, що є характерним для явища субдифузії.

Висновок

У цій статті розглянуто фрактальну модель тепло- та масоперенесення у процесі сушіння деревини. Для опису цієї моделі використано систему диференціальних рівнянь у частинних похідних дробового порядку з відповідними початковими умовами та граничними умовами третього роду. Також наведено відповідний метод для знаходження числового розв'язку цієї моделі. Основним завданням було проаналізувати поведінку розв'язку моделі при різних порядках дробової похідної. На підставі отриманих числових результатів розв'язку моделі зроблено висновок, що використання диференціальних рівнянь із дробовою похідною за часом є ефективнішим для опису процесу сушіння деревини та аналізу експериментальних даних, оскільки можна використовувати значення порядку дробової похідної як додатковий параметр моделі.

1. Nigmatullin R.R. // *Phys. stat. Solidi (b)*. 1986. V. 133. P.425. 2. Nigmatullin R.R. // *Ibid.* 1986. V. 133. P.713. 3. Бабенко Ю.И. Тепломасообмен. Методы расчета тепловых и диффузионных потоков. – Л.: Химия, 1986. – 144 с. 4. Нигматулин Р.Р. Дробный интеграл и его физическая интерпретация // *ТМФ*. – 1992. – Т. 90. – № 3. – С.354–368. 5. Суханов А.Д., Тимашев С.Ф. // *Журн. физ. химии*. – 1998. – Т. 72. – № 11. – 2073 с. 6. Шубин Г.С. Сушка и тепловая обработка древесины. – М.: Лесн. пром-ть, 1990. – 336 с. 7. Соколовський Я.І., Бакалець А. Моделювання нелінійних тепломасообмінних процесів у висушуваній деревині методом скінченних елементів // *Вісник Нац. ун-ту “Львівська політехніка”: “Комп’ютерні науки та інформаційні технології”*. – Львів. – 2005, Вип. 543. – С. 129–134. 8. Дендюк В.М., Поберейко В.П., Соколовський Я.І. Застосування методу кінцевих елементів для розрахунку нестационарних полів вологоперенесення у висушуваній деревині // *Лісове господарство, лісова, паперова і деревообробна промисловість*, 2003, Вип. 28. – С.100–106. 9. Самко С.Г., Килбас А.А., Марищев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с. 10. Povstenko Y.Z. / *International Journal of Engineering Science*, 43 (2005): 977–991. 11. Povstenko Y.Z. / *International Journal of Solids and Structures*, 44 (2007): 2324–2348. 12. Povstenko Y.Z. / *Journal of Thermal Stresses*, 28: 83-102, 2005. 13. Бейбалаев В.Д. Математические модели неравновесных процессов в средах с фрактальной структурой : автореф. дис. канд. физ.-матем. наук. – Махачкала, 2009. – 18 с. 14. Назаралиев М.А., Бейбалаев В.Д. Численные методы решения краевой задачи для уравнения теплопереноса с производной дробного порядка // *Вестник ДГУ*. – 2008. – Вып. 6. – С. 46–54.

УДК 519.853

М. Лобур, І. Фармага, У. Марікуца, О. Матвійків
Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра систем автоматизованого проектування

АНАЛІЗ І ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО ТЕПЛОВОГО ПРОЕКТУВАННЯ ТЕХНІЧНИХ ОБ’ЄКТІВ

© Лобур М., Фармага І., Марікуца У., Матвійків О., 2011

Розроблено єдиний підхід як до розв’язання обернених задач теплопровідності, так і до забезпечення функціональних та конструктивно-технологічних параметрів технічних об’єктів, основою якого є причинно-наслідкова постановка задачі синтезу.

Ключові слова: теплове проектування, обернені задачі теплопровідності, параметрична оптимізація.

A unified approach to solving inverse problems of heat conduction as well as providing functional and design and technological parameters of technical objects, based on a causal synthesis problem statement.

Keywords: thermal design, inverse heat conduction problems, parametric optimization.

Вступ

Нині добре розвинуто методи аналізу температурних полів та розрахунку процесів теплообміну в різних сферах застосування. Розроблено цілий ряд програмних систем, призначених для наукових та інженерних розрахунків. Постійно актуальними, з одного боку, і складними у формалізації, з другого, є задачі синтезу, а саме знаходження оптимальних проектних рішень з урахуванням температурних характеристик технічних об’єктів.

У роботі розроблено єдиний підхід як до розв’язання обернених задач теплопровідності, так і до забезпечення функціональних та конструктивно-технологічних параметрів технічних об’єктів. Основою цього підходу є причинно-наслідкова постановка задачі синтезу. Розглянуто загальну постановку векторної оптимізації, оператори та функціонали як неекстремальних, так і екстремальних.