повторно недоцільно – адже ще при їх проектуванні можна досягати результату, коли увесь матеріал матиме напруження, близькі до розрахункових. Але із умови технологічних витрат так не поступають, тому що часто уніфікація робить конструкцію дешевшою, ніж досконалий напружений стан. Досконалий напружений стан, коли $\kappa_{пк}=1$, можна досягати у балковій фермі, верхній пояс якої окреслений по параболі. Але такі ферми проектують рідко – через велику різнотипність елементів вони дорожчі уніфікованих. Тому виконувати попереднє напруження ферм, ігноруючи їх уніфікацію, недоцільно – адже це ускладнює технологію їх виготовлення, що суперечить принципу уніфікації. Таким чином приходимо до таких висновків.

Висновки

1. Раціональними можуть бути лише конструкції, які за технологією виготовлення близькі до прокатних балок, а за напруженим станом – до ферм.

2. Висновкові п. 1 відповідають шпренгельні та вантові конструкції із прокатними балками жорсткості та елементами підкріплення із профільної сталі.

3. Топологія елементів підкріплення повинна бути такою, щоби у балці жорсткості виникло кілька перерізів "n_1", в яких $\sigma_{max}\approx R_y$.

4. Топологія елементів підкріплення системи повинна мати значно менше елементів та вузлів, ніж ферма відповідного прогону.

1. Беленя Е.И. Обзор исследований предварительно напряженных металлических конструкций // III Международная конференция по предварительно напряженным металлическим конструкциям. – Том 5. – М., 1971. – С.57–74. 2. Трофимович В.В., Пермяков В.А. Оптимизация металлических конструкций. – К.: Вища школа, 1983. – 200 с.

УДК 539.3

В.П. Ревенко

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України

ЗГИН КОНСОЛІ ПОПЕРЕЧНОЮ СИЛОЮ В РАМКАХ ТРИВИМІРНОЇ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

Знайдено точний розв'язок задачі згину консолі прямокутного перерізу, навантаженої на кінці поперечною силою в постановці тривимірної теорії пружності. Отримано розподіл напружень і переміщень у тривимірному випадку. Підтверджено теорію Кірхгофа–Лява.

Вступ. У будівельних конструкціях використовують різноманітні балки і пластини, напружено-деформований стан (НДС) яких, як правило, розраховується за наближеними теоріями [1]. Тому розробка методів розрахунку цих елементів у тривимірній постановці з врахуванням всіх співвідношень теорії пружності є актуальною і важливою проблемою, розв'язок якої дасть змогу перевірити наближені теорії і визначити межі їх застосування. Знайдемо НДС консолі прямокутного перерізу, яка займає об'єм $D=\{(x,y,z)\in[-a,a]\times[-b,b]\times[0,c]\}$, при згині поперечною силою в рамках тривимірної теорії пружності. Матеріал консолі ізотропний, масові сили не враховуємо. Консоль на торці (переріз $z=c$) навантажена в напрямку осі Oy заданою поперечною силою $P=\iint\limits_S \tau_{yz}dS$, де область $S=\{(x,y)\in[-a,a]\times[-b,b]\}$. Всі інші зовнішні інтегральні зусилля і моменти прикладені до цього торця дорівнюють нулю. Бокові поверхні консолі вільні від навантаження. Для того, щоб консоль знаходилася в рівновазі на протилежному закріпленому торці (переріз $z=0$) повинне бути прикладене зовнішнє зусилля, яке дорівнює $-P$ і згинний момент $M_y=-cP$. Нам потрібно знайти такий розподіл напружень і переміщень, який би задовольняв співвідношення тривимірної теорії пружності і відповідні граничні умови. У випадку плоскої деформації така задача розв’язана в [2, с. 59]. В [3] описано метод знаходження напружень у консолі кругового і прямокутного перерізу, проте у випадку прямокутного перерізу, не наведені явні формули для визначеня дотичних напружень. В [3], також, не досліджувалися питання повноти системи функцій по яких побудовано розв’язок. Огляд літератури наведений в [4]. У статті знайдено розподіл напружень і переміщень при згині консолі прямокутного перерізу іншим методом, а також досліджено повноту одержаного розв’язку.

1. **Знаходження напружень.**

Для розглянутого випадку зовнішніх навантажень, тривимірний розподіл нормальних і дотичних напружень в консолі будемо шукати у вигляді

$$\sigma_z = \frac{P}{2aI_x} y(z-c), \quad \tau_{yz} = \tau_{yz}\left(x, y\right), \quad \tau_{xz} = \tau_{xz}\left(x, y\right), \tag{1}$$

де $I_x = \frac{2}{3} b^3$ – момент інерції поперечного перерізу консолі відносно осі x, а всі інші компоненти тензора напруження дорівнюють нулю. Підставимо подання (1) у рівняння рівноваги і умови сумісності напружень [2], одержимо

$$\frac{P}{2aI_x} y + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0, \qquad \left(1+\nu\right)\Delta \tau_{yz} + \frac{P}{2aI_x} = 0, \quad \Delta \tau_{xz} = 0, \tag{2}$$

де $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, ν – коефіцієнт Пуассона. Всі інші рівняння задовольнилися тотожно. При розв’язуванні рівнянь (2) потрібно враховувати граничні умови рівності нулю дотичних напружень на боковій поверхні консолі

$$\tau_{yz}\left(x, \pm b\right) = 0, \quad \tau_{xz}\left(\pm a, y\right) = 0. \tag{3}$$

Через задане навантаження і виконання рівнянь (2) дотичне напруження $\tau_{yz}\left(x, y\right)$ є парною функцією відносно змінних x, y, а $\tau_{xz}\left(x, y\right)$ є непарною відносно x, y.

Дотичні напруження τ_{xz} будемо шукати у вигляді ряду по повній, на проміжку $x \in [-a, a]$ в класі непарних кусково-неперервних функцій, ортонормованій системі функцій $\{\sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right) \; k = 1, 2, 3...\}$ [5],

$$\tau_{xz} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right) sh\left(\frac{k\pi y}{a}\right). \tag{4}$$

Це дотичне напруження зодовольняє третє рівняння (2) і другу граничну умову (3). Підставимо його в перше рівняння (2) і після виконання нескладних перетворень, одержимо

$$\tau_{yz} = -\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{a}\right) ch\left(\frac{k\pi y}{a}\right) - \frac{P}{4aI_x} y^2 + f\left(x\right). \tag{5}$$

Невідому функцію $f\left(x\right)$ визначимо із другого рівняння (2) і умови парності дотичних напружень τ_{yz}, вона повинна мати вигляд

$$f\left(x\right) = \frac{P\nu}{4(1+\nu)aI_y} x^2 + m_1,$$

де m_1 – невідомий коефіцієнт. Дотичні напруження (4), (5) дають нульовий крутний момент і поперечну силу в напрямку осі Ox в поперечному перерізу консолі

$$M_t = \iint_S (y\tau_{xz} - x\tau_{yz})dS = 0\,,\quad N_x = \iint_S \tau_{xz}dS = 0\,,$$

оскільки функції $x\tau_{yz}$, $y\tau_{xz}$, τ_{xz} – непарні відносно осі Ox. Знайдемо поперечну силу P в напрямку осі Oy

$$P = \iint_S \tau_{yz}dS = \int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\left\{-\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{a}\right) ch\left(\frac{k\pi y}{a}\right) - \frac{P}{4aI_x}y^2 + \frac{P\nu}{4aI_x(1+\nu)}x^2 + m_1\right\}dxdy\,. \tag{6}$$

Врахувавши, що $\int_{-a}^{a}\cos\left(\frac{k\pi x}{a}\right)dx = 0$, зведемо інтеграл (6) до такого вигляду

$$P = -\frac{P}{2} + \frac{\nu}{1+\nu}\frac{P}{2aI_x}bI_y + 4abm_1\,,$$

де $I_y = \frac{2}{3}a^3$. З цієї умови визначимо m_1

$$m_1 = \frac{P}{8ab}\left(3 - \frac{\nu}{1+\nu}\frac{a^2}{b^2}\right). \tag{7}$$

Підставимо в першу граничну умову (3) дотичне напруження (5), одержимо

$$\tau_{yz}(x,\pm b) = -\sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos\left(\frac{k\pi x}{a}\right) - Ab^2 + \frac{A\nu}{1+\nu}x^2 + m_1 = 0\,,$$

де $A = \frac{P}{4aI_x}$, $c_k = a_k ch\left(\frac{k\pi b}{a}\right)$. Цю граничну умову подамо у вигляді

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos\left(\frac{k\pi x}{a}\right) - m_1 = -Ab^2 + \frac{A\nu}{1+\nu}x^2\,. \tag{8}$$

У співвідношенні (8) зліва маємо ряд по повній ортонормованій системі функцій $\{1,\ \cos\left(\frac{k\pi x}{a}\right)\ k = 1,2,3...\}$ на проміжку $x \in [-a,a]$ в класі парних кусково неперервних функцій [5], а справа – відому парну функцію. Невідомі коефіцієнти цього ряду знайдемо із умов розкладу заданої фукції в ряд [5]. Після нескладних обчислень інтегралів, одержимо

$$m_1 = \frac{P}{8ab}\left(3 - \frac{\nu}{1+\nu}\frac{a^2}{b^2}\right),\ \ c_k = (-1)^k \frac{a}{k^2\pi^2}\frac{\nu}{1+\nu}\frac{P}{I_x},\quad k = 1,2,3,... \tag{9}$$

Як бачимо, знайдене значення коефіцієнта m_1 в формулах (7) і (9) збігається.

Напруження (1), (4), (5) з врахуванням співвідношень (9) дозволяють повністю в рамках тривимірної теорії пружності визначити напружений стан консолі довільного прямокутного перерізу. Треба відмітити, що знайдений розв'язок є точним лише в тому випадку, коли зовнішні дотичні зусилля на кінці консолі розподіляються за формулами (4), (5), а інтенсивність нормальних напружень σ_z пропорціональна y. Якщо зусилля на кінці консолі розподілені інакше, то розв'язок (1), (4), (5) не є точним біля кінця консолі, проте згідно з принципом Сен-Венана він є достатньо точним для поперечних перерізів віддалених від цього кінця. Відсутність в [3] явного подання дотичних напружень не дозволяє провести порівняння отриманих результатів.

2. Знаходження переміщень.

Позначимо переміщення в напрямку осей x, y, z через u, V, w, і запишемо закон Гука [2], $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\nu\sigma_z}{E} = -\frac{2\nu A}{E} y(z-c)$, $\varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\nu\sigma_z}{E} = -\frac{2\nu A}{E} y(z-c)$, $\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\sigma_z}{E} = \frac{2A}{E} y(z-c)$, $G\varepsilon_{xy} = G(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}) = 0$,

$$G\varepsilon_{xz} = G(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}) = \tau_{xz}, \quad G\varepsilon_{yz} = G(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}) = \tau_{yz}, \tag{10}$$

де $A = \frac{P}{4aI_x}$, E – модуль Юнга, $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$. Врахувавши вираз дотичних напружень (4), (5) і співвідношення (10), знайдемо, після деяких перетворень, переміщення у вигляді

$$u = -\frac{2\nu}{E} A(z-c)xy + A_1 z - C_2 y + B_1, \quad w = \frac{1}{E} A(z^2 - 2cz)y + \varphi(x, y) - A_1 x - B_2 y + D_1,$$

$$V = \frac{\nu}{E} A(z-c)(x^2 - y^2) - \frac{A}{3E}(z^3 - 3cz^2) + B_2 z + C_2 x + C_1, \tag{11}$$

де постійні $A_1, B_1, C_2, B_2, C_1, D_1$ визначають зміщення консолі як жорсткого тіла і залежать від умов закріплення консолі, а функція $\varphi(x, y)$ має вигляд

$$\varphi(x, y) = -\frac{a}{G\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k} \cos\left(\frac{k\pi x}{a}\right) sh\left(\frac{k\pi y}{a}\right) + \frac{\nu}{E} Ax^2 y - \frac{2+\nu}{3E} Ay^3 + \frac{m_1}{G} y. \tag{12}$$

Умови закріплення консолі в площині ($z = 0$) можуть бути дуже різноманітні. Проте ми не можемо зафіксувати якусь лінію в цьому перерізу без накладання додаткових зусиль, що приведе до появи місцевих напружень. Наприклад, будемо вважати, що точка $\{z = 0, y = 0, x = 0\}$ закріплена нерухомо. Оскільки ми розглядаємо тривимірне пружне тіло, то не можемо вважати, що після деформації всі лінії балки залишаються перпендикулярними перерізу $\{z = 0\}$, а можемо тільки вимагати перпендикулярності однієї лінії $\frac{\partial V(0,0,0)}{\partial z} = 0$. Так з цих умови буде слідувати $B_2 = \frac{m_1}{G}$, а всі інші константи дорівнюють нулю. Одержані формули дозволяють вибрати оптимальні умови закріплення консолі.

3. Визначення прогинів серединної поверхні.

Для практичного розрахунку НДС консолей, балок, пластин дуже важливо встановити залежність між діючим навантаженням і прогинами серединної поверхні. При цьому всі зусилля приводять до серединної поверхні $y = 0$, прогини якої $\bar{V}$ знайдемо із останнього співвідношеня (11)

$$\bar{V} = \frac{\nu}{E} A(z-c)x^2 - \frac{A}{3E}(z^3 - 3cz^2) + B_2 z + C_1. \tag{13}$$

Серединна поверхня при фіксованому значені z відносно змінної x має форму параболи. Як видно із співвідношень (11), (13) нормаль до серединної поверхні деформується досить складним чином. Знайдемо кривизну серединної поверхні в напрямку координатних осей x, z

$$\frac{1}{R_z} = \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial z^2} = -\frac{(z-c)P}{2aEI_x} = -\frac{M_z}{EI_x}, \quad \frac{1}{R_x} = \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial x^2} = \frac{\nu(z-c)P}{2aEI_x} = \nu\frac{M_z}{EI_x}, \tag{14}$$

де $M_z = \frac{(z-c)P}{2a}$ – погонний згинний момент в напрямку осі z. Співвідношення (14) виконуються також при чистому згині консолі [2]. Відмітимо, що перше рівняння (14) використовується в теорії опору матеріалів, як основне, для визначення прогинів балки.

Отримані точні значення переміщень при згині консолі можна використати для уточнення і перевірки наближених теорій згину пластин. Якщо покласти $a, c >> b$ і вважати $2b = h$ достатньо малою величиною, то розглянута консоль буде моделювати тонку пластину, для розрахунку НДС якої часто використовують гіпотези Кірхгофа-Лява (недеформованих нормалей). При розрахунку пластини згідно з цією теорією [1], отримаємо

$$\frac{1}{R_z} = \frac{\partial^2 \overline{V}}{\partial z^2} = -\frac{M_z}{EI_x} = -\frac{(z-c)P}{2aEI_x}, \quad \frac{1}{R_x} = \frac{\partial^2 \overline{V}}{\partial x^2} = \nu \frac{M_z}{EI_x} = \frac{\nu(z-c)P}{2aEI_x}. \tag{15}$$

Як бачимо, співвідношення (15) і (14) збігаються.

Висновки

1. Співвідношення (14) виконуються як при згині під дією поперечної сили, так і при чистому згині, отже, є універсальними. Вони повинні задовольнятися в наближених теоріях згину як балок, так і пластин.

2. Нормальне напруження σ_z (1), яке дає найбільший вклад у поле напружень, збігається з плоскою задачею [2, с. 59], дотичні напруження відрізняються.

3. Кривизни серединної поверхні пластини (15) знайдені за теорією Кірхгофа–Лява збігаються із значеннями (14), розрахованими в рамках тривимірної теорії пружності. Оскільки в теорії Кірхгофа–Лява в кінцевих формулах використовують саме співвідношення (15), то вона адекватно описує НДС пластини при згині поперечною силою і чистому згині.

1. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. – Москва: Физматгиз, 1963. – 635 с. 2. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. –Москва: Наука, 1975. – 576 с. 3. Новацкий В. Теория упругости. – Москва: Мир, 1975. – 872 с. 4. Meleshko V.V. Selected topics in history of the two-dimensional biharmonic problem // Appl. Mech. Rev. – Vol. 56. – No 1. (January 2003). – P. 33–85 5. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Часть II. –Москва: Наука, 1980. – 447 с.

УДК 539.3

Є.Г. Романушко
Київський національний університет будівництва і архітектури

РОЗРОБКА ТИПОВИХ ТЕХНОЛОГІЧНИХ СХЕМ ПРОВАДЖЕННЯ РОБІТ В ОБМЕЖЕНИХ УМОВАХ

Розглянуто розроблення типових технологічних схем провадження робіт в обмежених умовах.

Основою раціонального виконання будівельних процесів є їх технологічна підготовка, вихідним документом якої для практичного застосування є проект виконання робіт (ПВР). При виконанні ПВР, для забезпечення вибору рішень раціонального проведення процесів, розробники змушені виконувати варіантне проектування. Традиційні методи варіантного проектування проведення будівельних процесів обмежують кількість організаційно-технологічних рішень, які розглядаються при виборі остаточного варіанта виконання робіт, що в багатьох випадках не дозволяє знайти більш оптимальні їх рішення. Особливо це стосується виконання робіт у стислі терміни при підвищенні міри суміщення процесів, насичення зон проведення робіт, постійної зміни динаміки умов їх виконання, а також при реконструкції підприємств, коли потрібно враховувати значну кількість впливаючих на будівельно-монтажні роботи специфічних чинників.