УДК 528.48

АПРОКСИМАЦІЯ ПОВЕРХОНЬ ДИНАМІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ СУМІСНО З ВИРІВНЮВАННЯМ РЕЗУЛЬТАТІВ ГЕОДЕЗИЧНИХ ВИМІРЮВАНЬ З УРАХУВАННЯМ ЇХНІХ ПОХИБОК ТА ПОХИБОК ВИХІДНИХ ДАНИХ

О. Самойленко
ДП "Всеукраїнський науково-виробничий центр стандартизації, метрології, сертифікації та захисту прав споживачів" (ДП "Укрметртестстандарт")

Ключові слова: геодезичні вимірювання, похибка.

Постановка проблеми

Динамічні об'єкти – створені людиною чи природні об'єкти, що змінюють у просторі своє положення, орієнтацію та (або) форму, розміри та (або) взаємне положення своїх частин. Проблема змін, що відбуваються з об'єктами, є філософською, тому що немає нічого вічного серед фізичних об'єктів. Вони так чи інакше змінюються, а це означає, що всі об'єкти тією чи іншою мірою динамічні.

Однією з найважливіших складових проблеми, яку необхідно розв'язати, визначаючи геометричні параметри динамічних об'єктів, є встановлення геометричних параметрів поверхонь, тому що за походженням поверхня може бути як самостійним динамічним об'єктом, так і його складовою частиною, а також утворюватись під час руху об'єкта, наприклад, при обертанні.

Зв'язок із важливими науковими і практичними завданнями

Розроблені методи вимірювань та оброблення їх результатів покладено в основу розроблених за планами ДП "Укрметртестстандарт" методик перевірки вертикальних та горизонтальних циліндричних резервуарів, сферичних резервуарів, а також сферичних та еліптичних днищ резервуарів. Розроблені методи застосовувались також для визначення геометричних параметрів рефлекторів радіотелескопів.

Аналіз останніх досліджень та публікацій, які стосуються вирішення цієї проблеми

Задача апроксимації поверхонь динамічних об'єктів за виміряними координатами точок без урахування їхніх похибок розв'язана доволі давно, наприклад, для рефлекторів радіотелескопів [1].

Найповніше розв'язання задачі апроксимації поверхонь викладено в [2], але при апроксимації площин та поверхонь за просторовими координатами, визначеними з геодезичних вимірювань в [2], приймається, що ці координати рівноточні та некорельовані або рекомендується кожній координаті кожної точки надавати вагу, обернено пропорційну до квадрата похибки її визначення. У [3] використовується частковий випадок апроксимації поверхні резервуару вертикальним циліндром, але без врахування точності визначення координат.

Невирішені частини загальної проблеми

У [2] еліпсоїд похибок координат точки на поверхні заміняється на сферу. Інформація про орієнтування еліпсоїда похибок та залежність (кореляцію) координат кожної точки також втрачається. В джерелах немає ніяких відомостей про вагові коефіцієнти окремих координат, а тим більше кореляційну матрицю координат, отриману відповідно до строгих, з математичного погляду, методів. Зважаючи, що еліпсоїд похибок координат може бути дуже віддалений від сфери та для різних точок порізному орієнтований відносно поверхні, а це може викликати помітні неточності у визначенні геометричних параметрів, запропоноване в джерелах розв'язання цієї задачі не можна вважати задовільним.

Постановка завдання проблеми

Розробити та узагальнити, при визначенні геометричних параметрів динамічних об'єктів, методи просторових лінійно-кутових вимірювань за дотичною до поверхонь. Створити строгу за МНК методику вирівнювання результатів вимірювань сумісно з визначенням геометричних параметрів динамічних об'єктів, застосувавши кореляційну матрицю координат.

Виклад основного матеріалу проблеми

1. Методи вимірювань під час визначення геометричних параметрів поверхонь

У зв'язку з розробленням нових підходів до оброблення результатів вимірювань при визначенні геометричних параметрів поверхонь як часткового випадку динамічних об'єктів необхідно систематизувати методи геодезичних вимірювань. До цих методів зарахуємо три основні методи засічки:

– полярна;
– пряма кутова;
– тангенціальна.

Полярна засічка – відомий та найпоширеніший метод вимірювань за допомогою тахеометра, який має режим вимірювань без відбивача.

Пряма кутова засічка – відомий допоміжний метод вимірювань, коли треба визначити координати точки на поверхні або точки, яка розміщена на певній відстані від поверхні, на яку неможливо виміряти відстань, наприклад, точка, яка має форму вістря.

Тангенціальна засічка – це дещо модернізований метод малих кутів, коли вимірюються горизонтальні кути по дотичній до опуклої поверхні, наприклад, вертикального чи сферичного резервуара. Відлік на одну з точок (базову) приймається за умовний напрямок орієнтування. Обчисливши малі горизонтальні кути відносно цього напрямку та маючи наближене значення горизонтальної відстані до точок, визначають (множенням тангенса малого кута на відстань) відстані всіх точок відносно базової площини у напрямку, перпендикулярному до напрямку візування.

Відомий метод малих кутів є частковим випадком тангенціального методу і з успіхом застосовується для визначення кренів споруд. Його недоліком є те, що всі точки повинні лежати приблизно на лінії перетину двох вертикальних площин. Він непридатний, наприклад, для об’єктів сферичної форми.

Щоб повністю використовувати всі можливості тангенціального методу, треба створити геодезичну мережу, таку саму, як і для застосування полярної та прямої кутової засічки. Тахеометр або теодоліт перед вимірюваннями слід встановлювати над точкою геодезичної мережі і орієнтувати його на іншу точку геодезичної мережі. Виконувати вимірювання потрібно по дотичній до будь-якої опуклої поверхні не тільки горизонтальних, а і вертикальних кутів. У такому разі тангенціальний метод стає цілком самостійним. Тобто всі геометричні параметри об’єкта можна визначити, застосувавши під час вимірювань з точок геодезичної мережі тільки тангенціальний метод засічки.

Координати точок на поверхні об’єктів, які використовуються для визначення їхніх геометричних параметрів, не є прямо виміряні величини. Їх одержано опосередковано за кутовими та лінійними вимірюваннями. Виміряними величинами координати точок є умовно тільки для цієї конкретної обчислювальної задачі.

Строге, з погляду МНК, розв’язання задачі визначення геометричних параметрів будь-якого об’єкта будь-яким методом вимірювань можливе за наявності кореляційної матриці координат точок. Ці координати визначають опосередковано, як правило, полярною просторовою засічкою та обчислюють за відомими формулами:

$$\begin{aligned} x_i &= x_0 + D_i \cos(A_0 + N_i)\cos\alpha_i \\ y_i &= y_0 + D_i \sin(A_0 + N_i)\cos\alpha_i \,, \\ z_i &= z_0 + i_0 + D_i \sin\alpha_i \end{aligned} \qquad (1)$$

де x_0, y_0, z_0 – координати вихідної точки, над якою центрований тахеометр; A_0 – азимут (дирекційний кут) орієнтувального напрямку на другу вихідну точку; D_i – виміряна нахилена віддаль; N_i – виміряний горизонтальний напрямок; α_i – виміряний вертикальний кут; i_0 – виміряна висота приладу над точкою; x_i, y_i, z_i – визначувані координати точки на поверхні, геометричні параметри якої визначаються.

Кореляційна матриця координат, визначених полярною просторовою засічкою, обчислюється за формулою:

$$q^i_{xyz} = \overline{A}_i \cdot q_i \cdot \overline{A}_i^T = \begin{vmatrix} q_{x_i} K_{x_i y_i} K_{x_i z_i} \\ K_{y_i x_i} q_{y_i} K_{y_i z_i} \\ K_{z_i x_i} K_{z_i y_i} q_{z_i} \end{vmatrix}, \qquad (2)$$

де q_i – матриця зворотних ваг вихідних координат та виміряних величин; q_{x_i}, q_{y_i}, q_{z_i} – зворотні ваги визначених координат; $K_{x_i y_i}$, $K_{x_i z_i}$, $K_{y_i x_i}$, $K_{y_i z_i}$, $K_{z_i x_i}$, $K_{z_i y_i}$ – кореляційні моменти; $\overline{A}_i$ – матриця часткових похідних від функцій (1) за вихідними координатами та виміряними величинами (3). У розгорнутому вигляді кореляційна матриця координат, визначених полярною просторовою засічкою, обчислюється за формулою (4).

$$\overline{A}_i^T = \begin{vmatrix} \overline{a}_{11i} & \overline{a}_{21i} & \overline{a}_{31i} \\ \overline{a}_{12i} & \overline{a}_{22i} & \overline{a}_{32i} \\ \overline{a}_{13i} & \overline{a}_{23i} & \overline{a}_{33i} \\ \overline{a}_{14i} & \overline{a}_{24i} & \overline{a}_{34i} \\ \overline{a}_{15i} & \overline{a}_{25i} & \overline{a}_{35i} \\ \overline{a}_{16i} & \overline{a}_{26i} & \overline{a}_{36i} \\ \overline{a}_{17i} & \overline{a}_{27i} & \overline{a}_{37i} \\ \overline{a}_{18i} & \overline{a}_{28i} & \overline{a}_{38i} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial D_i} & \frac{\partial f_2}{\partial D_i} & \frac{\partial f_3}{\partial D_i} \\ \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_i} & \frac{\partial f_2}{\partial \alpha_i} & \frac{\partial f_3}{\partial \alpha_i} \\ \frac{\partial f_1}{\partial N_i} & \frac{\partial f_2}{\partial N_i} & \frac{\partial f_3}{\partial N_i} \\ \frac{\partial f_1}{\partial A_0} & \frac{\partial f_2}{\partial A_0} & \frac{\partial f_3}{\partial A_0} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_0} & \frac{\partial f_2}{\partial x_0} & \frac{\partial f_3}{\partial x_0} \\ \frac{\partial f_1}{\partial y_0} & \frac{\partial f_2}{\partial y_0} & \frac{\partial f_3}{\partial y_0} \\ \frac{\partial f_1}{\partial z_0} & \frac{\partial f_2}{\partial z_0} & \frac{\partial f_3}{\partial z_0} \\ \frac{\partial f_1}{\partial i_0} & \frac{\partial f_2}{\partial i_0} & \frac{\partial f_3}{\partial i_0} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(A_0+N_i)\cdot\cos\alpha_i & \sin(A_0+N_i)\cdot\cos\alpha_i & \sin\alpha_i \\ -D_i\cdot\cos(A_0+N_i)\cdot\sin\alpha_i & -D_i\cdot\sin(A_0+N_i)\cdot\sin\alpha_{ii} & D_i\cdot\cos\alpha_i \\ -D_i\cdot\sin(A_0+N_i)\cdot\cos\alpha_i & D_i\cdot\cos(A_0+N_i)\cdot\cos\alpha_i & 0 \\ -D_i\cdot\sin(A_0+N_i)\cdot\cos\alpha_i & D_i\cdot\cos(A_0+N_i)\cdot\cos\alpha_i & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \qquad (3)$$

$$q^i_{xyz} = \begin{vmatrix} \overline{a}_{11i} & \overline{a}_{12i} & \overline{a}_{13i} & \overline{a}_{14i} & \overline{a}_{15i} & \overline{a}_{16i} & \overline{a}_{17i} & \overline{a}_{18i} \\ \overline{a}_{21i} & \overline{a}_{22i} & \overline{a}_{23i} & \overline{a}_{24i} & \overline{a}_{25i} & \overline{a}_{26i} & \overline{a}_{27i} & \overline{a}_{28i} \\ \overline{a}_{31i} & \overline{a}_{32i} & \overline{a}_{33i} & \overline{a}_{34i} & \overline{a}_{35i} & \overline{a}_{36i} & \overline{a}_{37i} & \overline{a}_{38i} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} q_{D_i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_{\alpha_i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{N_i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_{A_0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_{x_0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_{y_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_{z_0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_{i_0} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \overline{a}_{11i} & \overline{a}_{21i} & \overline{a}_{31i} \\ \overline{a}_{12i} & \overline{a}_{22i} & \overline{a}_{32i} \\ \overline{a}_{13i} & \overline{a}_{23i} & \overline{a}_{33i} \\ \overline{a}_{14i} & \overline{a}_{24i} & \overline{a}_{34i} \\ \overline{a}_{15i} & \overline{a}_{25i} & \overline{a}_{35i} \\ \overline{a}_{16i} & \overline{a}_{26i} & \overline{a}_{36i} \\ \overline{a}_{17i} & \overline{a}_{27i} & \overline{a}_{37i} \\ \overline{a}_{18i} & \overline{a}_{28i} & \overline{a}_{38i} \end{vmatrix}, \qquad (4)$$

де $q_{D_i} = \sigma_{D_i}^2$ – зворотна вага виміряної нахиленої віддалі; $q_{\alpha_i} = \left(\frac{\sigma_{\alpha_i}}{\rho} D_i \right)^2$ – зворотна вага виміряного вертикального кута; $q_{N_i} = \left(\frac{\sigma_{N_i}}{\rho} D_i \right)^2$ – зворотна вага виміряного горизонтального напрямку; $q_{A_0} = \left(\frac{\sigma_{A_0}}{\rho} D_0 \right)^2$ – зворотна вага азимуту (дирекційного кута) орієнтувального напрямку на другу вихідну точку; D_0 – горизонтальне прокладення відстані до другої вихідної точки; ρ – радіан, виражений у тих самих одиницях, що і похибка вимірювання кута; $q_{x_0} = \sigma_{x_0}^2$, $q_{y_0} = \sigma_{y_0}^2$, $q_{z_0} = \sigma_{z_0}^2$ – зворотні ваги вихідних координат x_0, y_0 та z_0; $q_{i_0} = \sigma_{i_0}^2$ – зворотна вага виміряної висоти приладу; σ_{D_i} – СКП виміряної нахиленої віддалі; σ_{N_i} – СКП виміряного горизонтального напрямку; σ_{α_i} – СКП виміряного вертикального кута; σ_{A_0} – СКП вихідного азимуту (дирекційного кута) A_0; σ_{x_0}, σ_{y_0}, σ_{z_0} – СКП вихідних координат x_0, y_0 та z_0; σ_{i_0} – СКП виміряної висоти приладу.

Такий підхід до формування матриці зворотних ваг дасть змогу враховувати похибки вихідних координат точок геодезичної мережі та вихідного азимута.

Перемноживши матриці у формулі (4), одержимо кореляційну матрицю координат (2).

Матрицю ваг координат розраховують за відомою формулою:

$$P_{xyz}^i = (q_{xyz}^i)^{-1} = \begin{vmatrix} p_{x_i} \, p_{x_i y_i} \, p_{x_i z_i} \\ p_{y_i x_i} \, p_{y_i} \, p_{y_i z_i} \\ p_{z_i x_i} \, p_{z_i y_i} \, p_{z_i} \end{vmatrix}. \quad (5)$$

У частковому випадку, коли похибки вихідних даних та вимірювання висоти приладу дорівнюють нулю (вимірювання виконують з однієї точки, координати якої приймаються жорсткими), кореляційна матриця координат точки на поверхні обчислюється за спрощеною формулою:

$$q_{xyz}^i = \begin{vmatrix} \overline{a}_{11i} & \overline{a}_{12i} & \overline{a}_{13i} \\ \overline{a}_{21i} & \overline{a}_{22i} & \overline{a}_{23i} \\ \overline{a}_{31i} & \overline{a}_{32i} & \overline{a}_{33i} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} q_{D_i} & 0 & 0 \\ 0 & q_{N_i} & 0 \\ 0 & 0 & q_{\alpha_i} \end{vmatrix} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} \overline{a}_{11i} & \overline{a}_{21i} & \overline{a}_{31i} \\ \overline{a}_{12i} & \overline{a}_{22i} & \overline{a}_{32i} \\ \overline{a}_{13i} & \overline{a}_{23i} & \overline{a}_{33i} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} q_{x_i} \, K_{x_i y_i} \, K_{x_i z_i} \\ K_{y_i x_i} \, q_{y_i} \, K_{y_i z_i} \\ K_{z_i x_i} \, K_{z_i y_i} \, q_{z_i} \end{vmatrix}. \quad (6)$$

2. Загальна схема обчислення просторового положення, просторової орієнтації та інших геометричних параметрів динамічних об'єктів за методом найменших квадратів

Для обчислень під час визначення геометричних параметрів об'єктів використовується метод найменших квадратів, який для поверхонь є апроксимацією. Специфіка його застосування полягає в тому, що в рівняннях як виміряні величини застосовуються координати точок на поверхні об'єкта, який має ту чи іншу геометричну форму.

Схеми обчислень для будь-якої поверхні, просторове положення якої визначається за координатами, знайденими за результатами геодезичних вимірювань, мають багато спільного. Для того щоб зосередитись на специфіці, притаманній кожній поверхні, розглянемо спільні моменти.

Вихідні функції, що зв'язують виміряні величини, якими є координати точок, та визначувані параметри поверхні об'єкта в загальному випадку мають вигляд:

$$\begin{aligned} &\varphi_1(x_1, y_1, z_1, \tau_1 ... \tau_k) = 0 \\ &... \\ &\varphi_i(x_i, y_i, z_i, \tau_1 ... \tau_k) = 0 \quad , \\ &... \\ &\varphi_n(x_n, y_n, z_n, \tau_1 ... \tau_k) = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

де x_i, y_i, z_i – координати точок на поверхні об'єкта, знайдені за результатами геодезичних вимірювань, які виступають як виміряні величини; $\tau_1 ... \tau_k$ – визначувані геометричні параметри об'єкта; k – кількість визначуваних параметрів.

Система рівнянь поправок в загальному матричному вигляді записується:

$$AV = B\delta\tau + l, \quad (8)$$

де A – матриця часткових похідних від вихідних функцій (7) за виміряними координатам; B – матриця часткових похідних від вихідних функцій (7) за визначуваними геометричними параметрами; V – матриця поправок до виміряних координат; $\delta\tau$ – вектор поправок до наближених значень визначуваних геометричних параметрів; l – вектор вільних членів.

Щоб скласти систему нормальних рівнянь, введемо деякі узагальнені проміжні незалежні виміряні величини u_i, для яких:

$$AV = U = \begin{vmatrix} u_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_n \end{vmatrix}, \quad (9)$$

де

$$u_i = A_i V_i = \left| a_{i1} a_{i2} a_{i3} \right| \cdot \begin{vmatrix} v_{x_i} \\ v_{y_i} \\ v_{z_i} \end{vmatrix}. \quad (10)$$

Тоді рівняння (8) набуде вигляду:

$$U = B\delta\tau + l\,, \tag{11}$$

або детальніше

$$\begin{aligned} u_i &= a_{i1}v_{x_i} + a_{i2}v_{y_i} + a_{i3}v_{z_i} = \\ &= b_{i1}\delta\tau_1 + b_{i2}\delta\tau_2 + \ldots + b_{ij}\delta\tau_j + \ldots + b_{ik}\delta\tau_k + l_i\,. \end{aligned} \tag{12}$$

У випадку визначення геометричних параметрів поверхонь цією проміжною виміряною величиною є найкоротша відстань (тобто по перпендикуляру до поверхні) від точки, координати якої визначені, до поверхні (зокрема площини), геометричні параметри якої визначаються у просторі. Величина u_i – це, фактично, вектор, нормальний до апроксимуючої поверхні, який розкладається на три складові по осях координат – v_{x_i}, v_{y_i} та v_{z_i}. Цю величину також можна назвати радіальним відхиленням точки від поверхні або короткорадіальним відхиленням. Тобто цей вектор скерований у напрямку нормалі до поверхні у цій точці і збігається з напрямком вектора радіуса кривизни поверхні у цій точці.

Треба відзначити, що координати не є прямо виміряні величині. Їх одержано опосередковано за кутовими та лінійними вимірюваннями. Виміряними вони є умовно, тільки для цієї конкретної обчислювальної задачі. Тому, щоб уникнути викривлень при обробці, треба коректно, за методом найменших квадратів розрахувати ваги величин u_i за формулами (2)–(5).

Зворотна вага величини u_i обчислюється за формулою:

$$\begin{aligned} \frac{1}{P_{u_i}} = Q_{u_i} &= \begin{vmatrix} a_{i1} a_{i2} a_{i3} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} q_{x_i} K_{x_i y_i} K_{x_i z_i} \\ K_{y_i x_i} q_{y_i} K_{y_i z_i} \\ K_{z_i x_i} K_{z_i y_i} q_{z_i} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ a_{i3} \end{vmatrix} = \\ &= A_i q_{xyz}^i A_i^T\,, \end{aligned} \tag{13}$$

де q_{xyz}^i – кореляційна матриця координат, що обчислюється за формулою (2) або (6).

Вагу величини u_i знаходять за формулою:

$$P_{u_i} = \frac{1}{Q_{u_i}}\,. \tag{14}$$

Матриця ваг P_U для всієї сукупності координат має діагональний вигляд.

Система нормальних рівнянь матиме відомий вигляд:

$$N\delta\tau + L = 0\,, \tag{15}$$

де $N = B^T P_U B$ – квадратна матриця коефіцієнтів нормальних рівнянь; $L = B^T P_U l$ – вектор вільних членів нормальних рівнянь.

Нормальні рівняння у загальному вигляді розв'язують за схемою:

$$\delta\tau = -N^{-1} \cdot L = -Q \cdot L\,, \tag{16}$$

де $N^{-1} = Q$ – матриця, обернена до матриці нормальних рівнянь.

Нормальні рівняння розв'язують за умовами:

$$U^T P_U U = \sum_{i=1}^{n} P_{u_i} \cdot {u_i}^2 = \min\,; \tag{17}$$

$$\sum_{i=1}^{n} P_{u_i} \cdot u_i = 0\,. \tag{18}$$

Розв'язавши нормальні рівняння, поправки до виміряних величин – координат точок – обчислюють за формулами:

$$\begin{vmatrix} v_{x_i} \\ v_{y_i} \\ v_{z_i} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} q_{x_i} K_{x_i y_i} K_{x_i z_i} \\ K_{y_i x_i} q_{y_i} K_{y_i z_i} \\ K_{z_i x_i} K_{z_i y_i} q_{z_i} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ a_{i3} \end{vmatrix} \cdot P_{u_i} \cdot u_i\,. \tag{19}$$

Оцінку середньої квадратичної похибки одиниці ваги σ_u знаходять за формулою:

$$\sigma_u = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} P_{u_i} \cdot u_i^2}{n-k}}\,, \tag{20}$$

де n – загальна кількість точок, координати яких знайдені на поверхні; k – кількість визначуваних параметрів поверхні.

Значення, отримане у знаменнику формули (20), також можна для контролю обчислити за формулою:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} P_{u_i} \cdot u_i^2 &= V^T P_{xyz} V = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\begin{vmatrix} v_{x_i} v_{y_i} v_{z_i} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} p_{x_i} p_{x_i y_i} p_{x_i z_i} \\ p_{y_i x_i} p_{y_i} p_{y_i z_i} \\ p_{z_i x_i} p_{z_i y_i} p_{z_i} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} v_{x_i} \\ v_{y_i} \\ v_{z_i} \end{vmatrix} \right). \end{aligned} \tag{21}$$

У це значення середньої квадратичної похибки входять як нерівності самої поверхні, так і опосередковано, через похибки координат точок, похибки кутових і лінійних вимірювань.

Оцінки середньої квадратичної похибки визначуваних геометричних параметрів поверхні знаходять за формулою:

$$\sigma_i = \sigma_u \cdot \sqrt{Q_{ii}}\,. \tag{22}$$

3. Кореляційна матриця координат точок, одержаних з тангенціальної засічки

Великий практичний інтерес викликає тангенціальний метод, коли вимірювання виконують по дотичній до опуклих поверхонь. Їх теж треба використати у розв'язанні задачі визначення геометричних параметрів поверхонь. Відмінність від наведеного вище випадку полярної просторової засічки полягає в тому, що вимірюються тільки горизонтальний та вертикальний кути, а довжина – ні. Щоб ввести вимірювання, виконані по дотичній до системи параметричних рівнянь поправок, необхідно:

– обчислити наближені значення відстаней від точки встановлення приладу до точок на поверхні, на які виконувалися вимірювання по дотичній;

– знайти координати цих точок на поверхні, використовуючи виміряні горизонтальний та вертикальний кути та наближену відстань;

– обчислити матрицю зворотних ваг координат за формулою (4), прийнявши зворотну вагу виміряної довжини доволі великою порівняно зі зворотними вагами безпосередньо виміряних довжин, наприклад, більшою у $10^3 \ldots 10^4$ рази;

– обчислити матрицю ваг координат за формулою (5).

Параметричні рівняння поправок для такої точки можна вводити до системи параметричних рівнянь на загальних підставах, як і для точок, координати яких визначені полярною засічкою. Такі рівняння матимуть велике значення, адже тангенціальна засічка з невеликої відстані може бути значно точнішою, ніж полярна засічка, тому що похибка вимірювань відстаней у такому разі ніяк не впливатиме на похибку визначення геометричних параметрів поверхні.

4. Вирівнювання результатів багаторазової полярної та прямої просторової кутової засічки разом з визначенням геометричних параметрів поверхонь

Застосовуючи наведену методику визначення геометричних параметрів поверхонь, немає сенсу окремо вирівнювати полярну та пряму просторову кутову засічку. Їх вирівнюють у процесі визначення геометричних параметрів поверхонь.

Для цього для прямої просторової кутової засічки виконують такі самі операції з обчислення матриці ваг координат, як і для тангенціальної засічки, описані у 3.

Для полярної та прямої просторової кутових засічок для кожного просторового напрямку складають окреме рівняння поправок (12) та матрицю ваг координат (5), але ці рівняння об'єднує те, що в них входять координати однієї і тієї самої точки як виміряні. Структура матриць A та V з (8) та (9) для кожної окремої точки не матиме вигляду рівняння (10), а набуде вигляду:

$$A = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial z_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_i} & \frac{\partial\varphi_i}{\partial y_i} & \frac{\partial\varphi_i}{\partial z_i} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n} & \frac{\partial\varphi_n}{\partial y_n} & \frac{\partial\varphi_n}{\partial z_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{t1} & a_{t2} & a_{t3} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 \\ \ldots \\ A_t \\ \ldots \\ A_m \end{vmatrix};$$

$$V = \begin{vmatrix} v_{x_1} \\ v_{y_1} \\ v_{z_1} \\ \ldots \\ v_{x_i} \\ v_{y_i} \\ v_{z_i} \\ \ldots \\ v_{x_m} \\ v_{y_m} \\ v_{z_m} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} V_1 \\ \ldots \\ V_t \\ \ldots \\ V_m \end{vmatrix}; \qquad AV = U = \begin{vmatrix} u_1 \\ \ldots \\ u_t \\ \ldots \\ u_m \end{vmatrix},) \tag{23}$$

де t – номер просторового напрямку, виміряного на точку; m – загальна кількість просторових напрямків, виміряних на цю точку.

Для однієї і тієї самої точки складають однакові рівняння поправок для кожного просторового напрямку, а матриця ваг координат для кожного з рівнянь буде іншою, визначеною за формулою (5). Розв'язавши такі рівняння за формулами (12)–(22), одержимо найімовірніші значення координат точок на поверхні з урахуванням похибок всіх вимірювань одночасно з найкращою оцінкою геометричних параметрів поверхні.

Висновки

1. Введено поняття радіального відхилення як вектора, перпендикулярного до апроксимуючої поверхні, що складається з поправок до координат точок на поверхні, визначених з геодезичних вимірювань.
2. На основі рівняння зв'язку введена узагальнена, для всіх поверхонь, форма рівняння поправок, у якій як виміряна величина використовується радіальне відхилення реальної поверхні від апроксимуючої.
3. Розроблено як самостійний метод тангенціальної засічки для просторових кутових вимірювань по дотичній до будь-якої опуклої поверхні для визначення всіх її геометричних параметрів.
4. Розроблена єдина за формою подання кореляційна матриця координат точок, одержаних із полярної, тангенціальної та прямої просторової кутової засічки, необхідна для строгого, з погляду методу найменших квадратів, визначення геометричних параметрів поверхонь.
5. Розроблено метод вирівнювання багаторазової полярної та прямої просторової кутової засічки, виконаних на одні й ті самі точки поверхонь, сумісно з визначенням геометричних параметрів поверхонь, із застосуванням кореляційної матриці координат.

Література

1. Монин Ю.Г. Определение упругих деформаций рефлектора радиотелескопа РТ-22 Крымской астрофизической обсерватории АН СССР / Ю.Г. Монин // Известия Крымской астрофизической обсерватории. – М.: Наука. – 1970. – Т. XLI–XLII.
2. Баран П.И. Геодезические работы при монтаже и эксплуатации оборудования / П.И. Баран. – М.: Недра, – 1990. – 233 с.
3. International standard ISO 7507-3:2006. Petroleum and liquid petroleum products – Calibration of vertical cylindrical tanks: Part 3: Optical-triangulation method.

Апроксимація поверхонь динамічних об'єктів сумісно з вирівнюванням результатів геодезичних вимірювань з урахуванням їхніх похибок та похибок вихідних даних

О. Самойленко

Розроблено тангенціальний метод кутових вимірювань по дотичній до опуклих поверхонь, за яким можна визначити їх просторове положення та орієнтацію з точок геодезичної мережі без вимірювання довжин. Сформована кореляційна матриця координат

точок на поверхні, що дає змогу строго, з погляду методу найменших квадратів, врахувати вплив точності геодезичних вимірювань та вихідних координат на визначувані геометричні параметри поверхні, а також виконати вирівнювання геодезичних засічок сумісно з розв’язанням задачі апроксимації.

Аппроксимация поверхностей динамических объектов совместно с уравниванием результатов геодезических измерений с учетом их погрешностей и погрешностей исходных данных

А. Самойленко

Разработан тангенциальный метод угловых измерений по касательной к выпуклым поверхностям, позволяющий определить их пространственное положение и ориентацию с точек геодезической сети без измерения длин. Разработана корреляционная матрица координат точек на поверхности, позволяющая строго, с точки зрения метода наименьших квадратов, учесть влияние точности геодезических измерений и исходных координат на определяемые геометрические параметры поверхности, а также выполнить уравнивание геодезических засечек совместно с решением задачи аппроксимации.

Approximation of dynamic objects surfaces together with adjustment of the geodetic measurements results taking into account their errors and the initial data errors

A. Samoylenko

It has been developed tangential method of the angular measurements at a tangent to convex surfaces which makes it possible to determine their attitude and orientation from the points of geodetic network without lengths measurements. It has been developed the correlation matrix of the points coordinates on the surface that allows strictly, from the point of view of the least square method, to consider the influence of the geodetic measurements accuracy and reference coordinates on the determined geometric parameters of surface, and to carry out adjustment of the geodetic marks together with the solution of the approximation problem.