**УДК 697.9:621;697:621**

**О.Т. Возняк**
Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра теплогазопостачання і вентиляції

# МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ СТРУМИННИХ ТЕЧІЙ

© *Возняк О.Т., 2011*

**Розглянуті математичні моделі струминних течій у прямому та зворотному потоках повітря. Розглянуті осьові параметри вільної та обмеженої неізотермічної струмини в точках, зміщених від осі, а також коефіцієнти обмеження, взаємодії та неізотермічності.**

**Ключові слова: математичні моделі струминних течій, осьові параметри, коефіцієнти обмеження, взаємодії та неізотермічності.**

**In this article mathematical models of jets flows in direct and reverse air flow have been regarded. There are regarded both axial parameters of free and enclosured non izothermal air jet and in points, that are situated out the axis as well enclosure, interaction and non izotherming coefficients.**

**Key words: mathematical models of jets flows, axial parameters, enclosure, interaction and non izotherming coefficients.**

**Постановка проблеми.** Значну частину свого життя людина проводить в приміщенні: вдома, на роботі, у транспорті тощо. Її здоров’я, самопочуття, здатність до праці залежать від теплового комфорту в приміщенні. Питання теплового комфорту є домінуючим під час вибору зовнішніх конструкцій, а також під час проектування систем опалення, вентиляції та кондиціювання повітря, оскільки відчуття тепла людиною безпосередньо залежить від параметрів мікроклімату в приміщенні, зокрема температури внутрішнього повітря $t_B$, швидкості руху повітря *V.* Відтак значну увагу потрібно приділити методам визначення параметрів припливних струмин в обслуговуваній зоні вентильованих приміщень різного призначення, а також характеристик прямого та зворотного потоку, що є актуальним у цій роботі.

**Мета та задачі досліджень.** Метою цієї статті є розроблення математичних моделей із встановлення взаємозв’язку між мікрокліматичними факторами в приміщенні (температурою повітря в приміщенні, швидкістю повітря у робочій зоні) та параметрами припливної струмини (осьової швидкості, осьової надлишкової температури та швидкості і температури у точках, зміщених від осі) як у прямому, так і зворотному потоках повітря.

З наявних лінійних та нелінійних математичних моделей заслуговують увагу саме нелінійні. Якщо з цих моделей розглянути однофакторні функціональні залежності у графічному вигляді, то їх можна поділити на зростаючі та спадні, а кожна з цих категорій характеризується відповідною випуклістю чи увігнутістю (рис. 1).

Постає необхідність апроксимації наведених графіків для отримання емпіричних формул. Для цього у статті пропонується скористатитсь такими математичними моделями:

1а. Спадний увігнутий характер має залежність осьової швидкості $V_X$ та надлишкової температури $Dt_X$ у плоскій, осесиметричній струмині та коефіцієнт обмеження для обмежених струмин від повздовжної координати. У цьому разі придатними є дві математичні моделі:



Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua

поліноміальна та гіперболічна. Розглянемо поліноміальну математичну модель: $y = a + bx + cx^2$ (поліном другого степеня). У цьому разі похибка $S$ має вигляд

$$S(a,b,c) = \sum_{i=1}^{n}\left[y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)\right]^2 \tag{1}$$

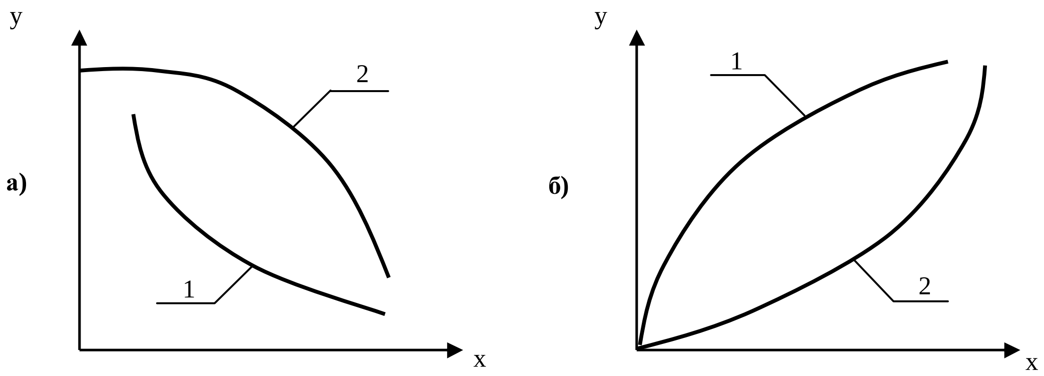


*Рис. 1. Характер однофакторних спадних (а) та зростаючих (б) залежностей: лінії 1 – увігнутість; лінії 2 – випуклість*

$S$ – це є функція трьох незалежних змінних $a, b, c$. Система рівнянь набуде вигляду:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n}\left[y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)\right]x_i^2 = 0 \\ \sum_{i=1}^{n}\left[y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)\right]x_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{n}\left[y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)\right] = 0 \end{cases} \tag{2}$$

або в розгорнутому вигляді:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} y_i x_i^2 - a\sum_{i=1}^{n} x_i^4 - b\sum_{i=1}^{n} x_i^3 - c\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} y_i x_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i^3 - b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - c\sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - b\sum_{i=1}^{n} x_i - c\cdot n = 0 \end{cases} \tag{3}$$

Отримано систему лінійних рівнянь для визначення невідомих $a, b, c$. З характеру задачі випливає, що система має однозначний розв'язок і, що за отриманих значень $a, b, c$ функція $S(a, b, c)$ має мінімум.

Знайдемо ці чисельні значення $a, b, c$. Для цього введемо заміну змінних:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i x_i^2 = A; \quad \sum_{i=1}^{n} y_i x_i = B; \quad \sum_{i=1}^{n} y_i = H; \quad \sum_{i=1}^{n} x_i^4 = D;$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^3 = E; \quad \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = F; \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = G;$$

і підставимо ці величини у систему (2)

$$\begin{cases} D\cdot a + E\cdot b + F\cdot c = A \\ E\cdot a + F\cdot b + G\cdot c = B \\ F\cdot a + G\cdot b + n\cdot c = H \end{cases} \tag{4}$$



Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua

Виконуючи лінійні комбінації, розв'язуємо систему (4) методом Гаусса.

$$\begin{cases} D\cdot a+E\cdot b+F\cdot c=A \\ (E^2-F\cdot D)b+(F\cdot E-G\cdot D)\cdot c=AE\text{-}BD \\ (E\cdot F-G\cdot D)b+(F^2-nD)\cdot c=AF\text{-}HD \end{cases} \quad (5)$$

Проводимо такий етап заміни змінних:

$$E^2-F\cdot D=a_1; \quad E\cdot F-G\cdot D=a_2; \quad F^2-nD=a_3;$$
$$AE\text{-}BD=a_4; \quad AF\text{-}HD=a_5$$

і отримаємо з (5):

$$\begin{cases} a_1b+a_2c=a_4 \\ a_2b+a_3c=a_5 \end{cases} \quad (6)$$

Розв'язком (6) буде:

$$c=\frac{a_2a_4-a_1a_5}{a_2^2-a_1a_3}; \qquad b=\frac{a_2a_5-a_3a_4}{a_2^2-a_1a_3},$$

тобто

$$c=\frac{(EF-GD)(AE-BD)-(E^2-FD)(AF-HD)}{(EF-GD)^2-(E^2-FD)(F^2-nD)} \quad (7)$$

$$b=\frac{(EF-GD)(AF-HD)-(F^2-nD)(AE-BD)}{(EF-GD)^2-(E^2-FD)(F^2-nD)} \quad (8)$$

Підставляючи (7) і (8) у перше рівняння системи (5), знайдемо $a$:

$$a=\frac{HD(F^2-EG)+DG(AG-BF)+nD(BE-AF)}{(EF-GD)^2-(E^2-FD)(F^2-nD)} \quad (9)$$

Розглянемо гіперболічну математичну модель: $y=\dfrac{a}{x-b}$.

Припливна струмина характеризується початковою та основною ділянкою, що враховується константою $b$ для певного виду струмин та відповідної характеристики струмини: осьової швидкості $V_x$ чи осьової надлишкової температури $Dt_x$.

Для визначення невідомих констант $a$ і $b$ зобразимо функцію у табличній формі:

*Таблиця 1*

**Табличне задання функцій**

| x | $x_1$ | $x_2$ | … | $x_i$ | … | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| y | $y_1$ | $y_2$ | … | $y_i$ | … | $y_n$ |

Оскільки наявні $n$ точок, то можна записати $n$ рівнянь, а при двох невідомих необхідно скласти систему з двох рівнянь. За наявності $n$ рівнянь кількість систем рівнянь становить $C_n^2$, з кожної з яких отримується розв'язок для констант $a_i$ та $b_i$. Ці розв'язки будуть близькими, але відрізнятимуться певною похибкою. Тому для отримання остаточного розв'язку необхідно обчислити середнє значення з отриманих $a_i$ та $b_i$.

$$\begin{cases} y_i=\dfrac{a_i}{x_i-b_i} \\ y_j=\dfrac{a_j}{xj-bj} \end{cases} \quad (10)$$



Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua

Після почленного ділення:

$$\begin{cases} y_i = \dfrac{a_i}{x_i - b_i} \\ \dfrac{y_i}{y_j} = \dfrac{x_j - b_j}{x_i - b_i} \end{cases} \qquad (11),$$

звідки $b_i = \dfrac{y_i x_i - y_j x_j}{y_i - y_j}$; $a_i = y_i(x_i - b_i)$.

В результаті:

$$a = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \ ; \quad b = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i \ .$$

2а. Спадний випуклий характер має залежність швидкості $V_y$ та надлишкової температури $Dt_y$ від поперечної координати в поперечному перерізі неізотермічної осесиметричної або плоскої струмини. Математичну модель пропонується прийняти у вигляді: $y = a - bx^n$. У цій математичній моделі величина *a* – це відома осьова швидкість $V_x$ , а невідомими є лише дві константи $b$ та $n$.

Для отримання розв'язку діємо аналогічно, задаючи функцію у табличному вигляді (таблиця) та отримуючи кількість систем рівнянь $C_n^2$ .

$$\begin{cases} y_i = a - b_i x_i^{n_i} \\ y_j = a - b_j x_j^{n_j} \end{cases} \qquad (12)$$

Після перенесення величин у ліву та праву частини рівнянь, почленного ділення та логарифмування отримуємо

$$n_i = \frac{lg \dfrac{a - y_i}{a - y_j}}{lg \dfrac{x_i}{x_j}} \qquad \textbf{(13)}$$

$$b_i = \frac{a - y_i}{x_i^{n_i}} \qquad \textbf{(14),}$$

де $n_i$ визначається за формулою (13).

Аналогічно, остаточний розв'язок

$$n = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} n_i \ ; \qquad b = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} b_i \ .$$

2б. Зростаючий випуклий характер має залежність швидкості у зворотному потоці $V_{зв}$ та коефіцієнтів взаємодії $K_{вз}$ та неізотермічності $K_i$ від повздовжної координати, а також такою залежністю описуються акустичні властивості струмин різного типу.

У такому разі рекомендуються дві математичні моделі: поліноміальна та степенева. Оскільки поліноміальна математична модель була розглянута вище, то розглянемо степеневу математичну модель: $y = ax^n$. Потрібно зазначити, що $n < 1$.

Діючи за описаною схемою, отримуємо

$$\begin{cases} y_i = a_i x_i^{n_i} \\ y_j = a_j x_j^{n_j} \end{cases} \qquad (15)$$



Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua

$$n_i = \frac{lg \dfrac{y_i}{y_j}}{lg \dfrac{x_i}{x_j}} \qquad (16)$$

$$a_i = \frac{y_i}{x_i^{n_i}} \qquad (17),$$

де $n_i$ визначається за формулою (16).

Остаточний розв'язок одержуємо аналогічно

$$n = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} n_i \;; \qquad a = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} a_i \;.$$

1б. Зростаючий увігнутий характер має залежність швидкості у зворотному потоці $V_{зв}$ від повздовжної координати.

У цьому разі теж рекомендується поліноміальна та степенева математичні моделі, але показник степеня $n > 1$. Розв'язок отримуємо аналогічно до попереднього випадку.

**Висновки.** Запропоновані математичні моделі адекватно зображають закономірності струминних течій у вентиляційній техніці.

*1. Возняк О., Ковальчук А. Ефективність повітророзподілу зустрічними неспіввісними струминами // Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка". – 2002. – № 460: Теплоенергетика. Інженерія довкілля. Автоматизація. – С. 157–161. 2. Vozniak O., Kovalchuk A. Air distribution by opposite non-coaxial air jets. Zbornik prednasok: VII Vedecka Konferencia s medzinarodnou ucastou. – Kosicko – Lvovsko – Rzeszowska, 2002. – S. 173–178. 3. Возняк О., Ковальчук А., Іванусь Є., Кіц А. Повітророзподіл у приміщенні при взаємодії зустрічних неспіввісних струмин // Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка". – 2001. – № 432: Теплоенергетика. Інженерія довкілля. Автоматизація. – С. 31–37. 4. Vozniak O., Dovbush O. Influence of indoor climate on a person heat exchange in a room. Zeszyty naukowe Politechniki Rzeszowskiej "Aktualne problemy budownictwa i Inzynierii srodowiska"; czesc 2 – inzynieria srodowiska". – Rzeszow, 2000. – S. 441–447.*



Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua