УДК 624.075: 539.3

О.Р. Давидчак , Р.М. Тацій , Т.І. Ушак
Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра будівельної механіки

РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ДИНАМІКИ ДИСКРЕТНО-НЕПЕРЕРВНИХ СТРИЖНЕВИХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ З АПРОКСИМАЦІЄЮ КОЕФІЦІЄНТІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Пропонується методика визначення частот і форм власних коливань стрижневих систем із кусково-неперервними розподілами параметрів на основі алгоритму МГЕ і методу дискретизації елементів.

Вступ. Сьогодні активно розвивається багатьма дослідниками універсальний числово-аналітичний метод граничних елементів (МГЕ), який порівняно з методом скінчених елементів (МСЕ) і методом скінчених різниць (МСР) має певні переваги під час розв’язання тривимірних і динамічних задач [1,2,3]. ГЕ належить до методів розв’язання крайових задач на основі інтегральних рівнянь, які вважаються більш точними й економічними від методів, основаних на апроксимації диференціальних операторів (МСЕ, МСР). Достатньо повно розроблений МГЕ для задач статики та динаміки стрижневих систем, які зводяться до розв’язання лінійних диференціальних рівнянь із постійними коефіцієнтами. Проте при кусково-неперервних розподілах параметрів моделі інтегрування диференціальних рівнянь класичними підходами пов’язане зі значними труднощами або з появою складних фундаментальних функцій. Тому в літературі у таких випадках при розрахунку МГЕ використовувались різні наближені підходи, наприклад, врахування зосереджених мас на стрижневих елементах у задачах динаміки приведенням їх до еквівалентної розподіленої маси [3] та інші. У зв’язку з цим розвиток різних варіантів МГЕ, у тому числі і для стрижневих систем, зокрема з кусково-неперервними розподілами параметрів, є актуальною науковою проблемою.

Тут пропонується використати для знаходження частот і форм власних коливань стрижневих систем із дискретно-неперервними розподілами параметрів алгоритм МГЕ з еволюційними операторами, що відповідають квазідиференціальним рівнянням, отриманим при певній апроксимації коефіцієнтів відповідних рівнянь.

Методика розрахунку. *Для окремого стрижня* рівняння поперечних вільних коливань в амплітудному стані має вигляд [4]:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2v}{dx^2}\right)-\omega^2\left(m^*v-\frac{d}{dx}\left(\mu^*\frac{dv}{dx}\right)\right)=0, \tag{1}$$

де $m^*=m(x)+\sum M_i\delta(x-x_i)$; $\mu^*=\mu(x)+\sum I_i\delta(x-x_i)$ – погонні маса й момент інерції, причому $m(x)$ і $\mu(x)$ – звичайні функції, а M_i, I_i – маса й момент інерції вантажів, зосереджених у перерізах $x=x_i$.

Для розв’язання рівняння (1) використаємо методи теорії квазідиференціальних рівнянь [5]. Позначимо квазіпохідні так

$$y^{[0]}\overset{df}{\equiv}y(x);\qquad y^{[1]}(x)=y'(x); \tag{2}$$

$$y^{[2]}(x)=EIy''(x)\ ;\quad y^{[3]}(x)=\omega^2\mu^*y'(x)-\left(EIy''(x)\right)',$$

які являють собою відповідно прогин, кут повороту, момент і перерізуючу силу в даному перерізі x.

Вихідне квазідиференціальне рівняння (1) зводимо до системи рівнянь першого порядку [6]

$$Y'(x) = C'(x) \times Y(x), \tag{3}$$

де

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y \\ y^{[1]} \\ y^{[2]} \\ y^{[3]} \end{pmatrix}; \quad C'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0^{-1}(x) & 0 \\ 0 & a_1(x) & 0 & 1 \\ a_2(x) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \tag{4}$$

$$a_0 = EI; \quad a_2 = -\omega^2 \left(m_0 + \sum_{k=1}^{n} \delta(x - x_k) M_k \right); \quad a_1 = -\omega^2 \left(\sum_{i=1}^{t} I_i \delta(x - x_i) + \mu \right).$$

Функція C(x) допускає стрибки $\Delta C(x) = C(x) - C(x-0)$

$$\Delta C(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta a_1(x) & 0 & 0 \\ \Delta a_2(x) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Для побудови еволюційного оператора B(x,α), що відповідає квазідиференціальному рівнянню (1), коефіцієнти $a_1(x)$ і $a_2(x)$ подаємо у вигляді дельта-функцій

$$a_1(x) = \alpha_1'(x) \sim \sum_{k=1}^{n} f_1(x_k) * \delta(x - x_0); \quad a_2(x) = \alpha_2'(x) \sim \sum_{k=1}^{n} f_2(x_k) * \delta(x - x_0), \tag{6}$$

де $\alpha_1(x) = \int da_1(x)$ – представляється кусково-сталою функцією із стрибками в точках $x_k = h \cdot k$; n – кількість ділянок, на які розбивається проміжок інтегрування; $h = x_k - x_{k-1}$.

Стрибок функції $\Delta C(x_k)$ запишеться

$$\Delta C(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_1(x_k) & 0 & 0 \\ f_2(x_k) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

де $f_1(x_k) \sim -\omega^2 \left(\mu h + \sum_{i=1}^{j} I_i \delta(x_k - x_i) \right)$; $f_2(x_k) \sim -\omega^2 \left(m_0 h + \sum_{i=1}^{j} M_i \delta(x - x_i) \right)$.

При такому представленні коефіцієнтів a_1 і a_2, якщо буде відомий еволюційний оператор диференціального рівняння $(a_0 y'')'' = 0$ – $B(x_k - 0, x_{k-1})$, то фундаментальну матрицю диференціальної системи (3) можна знайти за формулою

$$\mathrm{B}^*(\mathrm{x}, \mathrm{x}_0) = \prod_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} (\mathrm{E} + \Delta\mathrm{C}(\mathrm{x}_\mathrm{k})) \times \mathrm{B}(\mathrm{x}_\mathrm{k} - 0; \mathrm{x}_{\mathrm{k}-1}), \tag{8}$$

де E – одинична матриця.

Тоді розв'язок рівняння (1) матиме вигляд

$$Y(x) = B^*(x, x_0) \times Y_0, \tag{9}$$

де Y(x) – матриця параметрів напружено-деформованого стану у перерізі стрижня; Y_0 – матриця початкових параметрів; $B^*(x,x_0)$ – фундаментальна матриця диференціальної системи (3), елементи якої знаходяться через функцію Коші для рівняння $(EI(x)y'')'' = 0$.

Для довільної стрижневої системи можна отримати систему рівнянь такої ж будови, як і (9). Матриця B^* перетвориться у квазідіагональну, а вектори $Y(x)$ і Y_0 будуть містити параметри деформівного стану всіх стрижнів у довільній і початковій точках

$$B^* = \begin{vmatrix} B_1(x,x_0) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_i(x,x_0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B_m(x,x_0) \end{vmatrix}; \quad Y(x) = \begin{vmatrix} Y_1(x) \\ \vdots \\ Y_i(x) \\ \vdots \\ Y_m(x) \end{vmatrix}; \quad Y_0 = \begin{vmatrix} Y_{01} \\ \vdots \\ Y_{0i} \\ \vdots \\ Y_{om} \end{vmatrix}, \tag{10}$$

де m – кількість стрижнів у системі.

Граничні параметри стрижнів системи будуть зв'язані рівняннями рівноваги й сумісності переміщень вузлів. Це дозволяє перенести граничні параметри стрижнів із матриці Y у матрицю Y_0, виконати відповідні перетворення матриці B^* і звести систему (9) до системи лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих граничних параметрів стрижнів за такою схемою [3]

$$Y = B^* * Y_0 \quad \rightarrow \quad B^* * Y_0 - Y = 0 \quad \rightarrow \quad B^*{}_* * Y_* = 0. \tag{11}$$

Спектр частот власних коливань знаходять з умови рівності нулю визначника

$$\left| B^*{}_* \right| = 0. \tag{12}$$

Рівняння (12) дає змогу підбором визначити повний спектр частот стрижневої системи.

Запропонований алгоритм розрахунку може бути використаний при розрахунку на вимушені коливання і для задач стійкості стрижневих систем із дискретно-неперервним розподілом параметрів.

Висновки. Запропонована методика розрахунку дозволяє отримати розв'язок задач динаміки й стійкості через простіші фундаментальні функції, від отримуваних у літературі , і розширити клас розв'язуваних задач, зокрема для стрижневих систем із дискретно-неперервними розподілами параметрів, без додаткових спрощень та допущень.

1. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Метод граничных элементов в прикладных науках / Пер. с англ., под ред. Р.В. Гольдштейна. – М.: Мир, 1984. – 494 с. 2. Heubner K.H. The Finite Element Method for Engineers. – New York-Toronto: John Wiley and Sons, 1975. – 500 p. 3 Баженов В.А., Дащенко А.Ф., Коломиец Л.В., Оробей В.Ф. Строительная механика. Специальный курс. Применение метода граничных елементов. – Одесса: Астропринт, 2001. – 240 с. 4. Образцов И.Ф., Онанов Г.Г. Строительная механика скошенных систем. – М.: Машиностроение, 1973. – 654 с. 5. Тацій Р.М. Узагальнені квазідиференціальні рівняння. Науково-учбовий центр математичного моделювання ІППММ ім. Я.С. Підстригача АН України. Львів, 1994. – 54 с. 6. Тацій Р.М., Давидчак О.Р. Розрахунок неперерсно-дискретних стержневих систем // Вісн. НУ "Львівська політехніка". – 2002. – № 462. – С.145–149.

УДК 624.074.04

Б.Г. Демчина, В.С. Фіцик
Національний університет "Львівська політехніка",
кафедра будівельних конструкцій та мостів

ВИКОРИСТАННЯ ПРОГРАМНОГО КОМПЛЕКСУ *КОЛДЕМ* ДЛЯ РОЗРАХУНКІВ ПРОСТОРОВОЇ СИСТЕМИ *ГОЛЬДПЛАН* НА ВПЛИВ ВИСОКИХ ТЕМПЕРАТУР ПОЖЕЖІ

Подано результати розрахунків температурної та силової задачі за допомогою програмного комплексу (ПК) КОЛДЕМ і проведено їх зіставлення з результатами натурного вогневого експерименту.

Аналіз результатів багатьох натурних вогневих експериментів, виконаних на багатоповерхових житлових та громадських будівлях або їх фрагментах [1, 2], показав, що під час пожежі руйнування одної із конструкцій споруди не приводить до руйнування цілої будівлі. Пояснити це можна