

НАПРУЖЕННЯ В СПАЯНИХ РІЗНОРІДНИХ ПІВПЛОЩИНАХ
 З ВКЛЮЧЕННЯМ І ТРІЩИНОЮ ЗА ДІЇ РОЗТЯГУ

В. Зеленьак ^a, Р. Мартиняк ^b, Б. Слободян ^b

^a Національний університет “Львівська політехніка”
 вул. С. Бандери 12, 79013, Львів, Україна

^b Інститут прикладних проблем механіки і математики
 ім. Я.С. Підстригача НАН України, м. Львів, Україна

(Отримано 21 вересня 2008 р.)

Розглянуто двовимірну пружну задачу для трикомпонентної області (дві спаяні різно-
 рідні півплощини з включенням в одній з них), що містить прямолінійну тріщину. Задача
 зведена до системи двох сингулярних інтегральних рівнянь на гладкому (межа включення)
 і з кутовими точками (тріщина) контурах. Одержана система інтегральних рівнянь
 розв’язана чисельно за допомогою методу механічних квадратур для випадку кругового
 включення і прямолінійної тріщини, розташованої паралельно до лінії розділу півплощин,
 за умов одновісного розтягу в усій трикомпонентній області. Числові результати наведені у
 вигляді графічних залежностей коефіцієнтів інтенсивності напружень у вершинах тріщини
 від пружних властивостей включення і півплощин, а також від віддалі між тріщиною і
 включенням.

Ключові слова: тріщина, включення, напруження

2000 MSC: 74F05

УДК: 539.3

Вступ

Дослідження напружень у пластинах обумовлені широким їх розповсюдженням у вигляді елементів конструкцій, які працюють у складних умовах експлуатації. Механічні напруження, що виникають в тілі за дії зовнішніх навантажень, можуть призвести до порушення структури матеріалу, зміни його фізичних властивостей, утворення нових і росту уже наявних тріщин, а в результаті – до локального або повного руйнування конструкції чи її елементів. Тому вивчення розподілу напружень в околі вершин тріщин має важливе значення в розрахунках на міцність і довговічність елементів конструкцій з тріщинами, вирішення проблеми оптимізації багатьох технологічних процесів – раціональним підбором матеріалів складених пластинчастих конструкцій з метою збільшення їх тріщиностійкості та зменшення в них концентрації напружень.

Одним із найефективніших методів розв’язування задач теорії тріщин є метод інтегральних рівнянь. Його застосовано раніше, зокрема, під час розв’язування двовимірних задач пружності для кусково-однорідних тіл з тріщинами [2–4, 7–10]. Однак у цих працях розглядалися двокомпонентні області з тріщинами. У цій роботі досліджується розподіл напружень поблизу вершин тріщини, яка знаходиться в трикомпонентній області (дві спаяні різнорідні півплощини з включенням в одній з них) за умов одно-

вісного розтягу, перпендикулярного до лінії тріщини у трикомпонентній області.

I. Постановка задачі

Нехай безмежна площина складається із двох пружних, ізотропних, різнорідних півплощин S^+ і S^- з лінією розділу L_0 . Нижня півплощина містить кругле включення, обмежене контуром L_1 , і прямолінійну тріщину L_2 . Вважаємо, що контури L_0 , L_1 , L_2 не мають спільних точок і додатним напрямком обходу контурів L_0 , L_1 є такий, що включення або верхня півплощина залишається зліва (рис. 1).

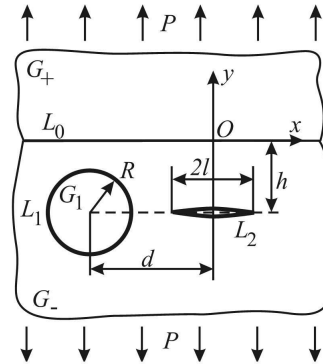


Рис. 1. Геометрія трикомпонентної області з тріщиною

Контури L_k ($k = 1, 2$) віднесено до локальних систем координат $x_k O_k y_k$, осі $O_k x_k$ паралельні до осі Ox , яка збігається з контуром L_0 . Точки O_k визначаються в основній системі декартових координат xOy комплексними координатами $z_k^0 = x_k^0 + iy_k^0$, а зв'язок між координатами точок на площині дають співвідношення $z = z_k + z_k^0$, $z = x + iy$, $z_k = x_k + iy_k$.

Припускаємо, що на контурах L_0 і L_1 є ідеальний механічний контакт

$$[N(t_k) + iS(t_k)]^+ = [N(t_k) + iS(t_k)]^-,$$

$$[u(t_k) + iv(t_k)]^+ = [u(t_k) + iv(t_k)]^-,$$

$$t_0 = z \in L_0, t_1 = z_1 \in L_1, k = 0, 1, \quad (1)$$

береги тріщини L_2 не контактують в процесі деформації і вільні від навантажень

$$[N(t_{-2}) + iS(t_2)]^\pm = 0, t_2 = z_2 \in L_2, \quad (2)$$

де N і S – нормальні і дотичні компоненти навантаження; u, v – компоненти переміщень; t_k – комплексні координати точок на контурі L_k в локальній системі координат $x_k O_k y_k$; індекси “+” і “-” вказують на крайові значення відповідних величин зліва і справа при підході до контуру $L_k, k = 0, 1, 2$.

II. Комплексні потенціали напружень

Комплексні потенціали $\Phi(z), \Psi(z)$ виберемо у вигляді [6]

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q_0(t_0) dt_0}{t_0 - z} + \Phi_1(z);$$

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\overline{Q_0(t_0) dt_0}}{t_0 - z} - \frac{\overline{t_0 Q_0(t_0) dt_0}}{(t_0 - z)^2} \right] + \Psi_1(z). \quad (3)$$

Тут

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^2 \int_{L_k} \frac{Q_k(t_k) dt_k}{\xi_k - z}; \quad \xi_k = t_k + z_k^0;$$

$$\Psi_1(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^2 \int_{L_k} \left[\frac{\overline{Q_k(t_k) dt_k}}{\xi_k - z} - \frac{\overline{\xi_k Q_k(t_k) dt_k}}{(\xi_k - z)^2} \right]; \quad (4)$$

$$Q_k(t_k) = \begin{cases} g_0(t_0), & k = 0, \\ g_1(t_1), & k = 1, \\ g_2'(t_2), & k = 2, \end{cases}$$

де $g_0(t_0), g_1(t_1)$ – невідомі функції на контурах L_0, L_1 ; $g_2(t_2)$ – невідомий стрибок переміщень

при переході через лінію тріщини L_2 . Функція $g_2'(t_2)$ повинна мати на кінцях тріщини інтегровні особливості. Тут і нижче штрихом позначено похідну, а лінією зверху – спряжену величину.

Якщо тепер задовольнити за допомогою потенціалів (3), (4) крайові умови (1), (2), то одержимо систему трьох інтегральних рівнянь на контурах L_0, L_1, L_2 стосовно функцій $Q_0(t_0), Q_1(t_1), Q_2(t_2)$. Тут скористаємось застосованим в [6] підходом, за допомогою якого одержимо систему двох інтегральних рівнянь на контурах L_1, L_2 . Для цього, задовольнивши за допомогою потенціалів (3), (4) крайові умови (1) на контурі L_0 , одержимо інтегральне рівняння стосовно функції $Q_0(t_0)$:

$$A_0 Q_0(\tau_0) + \frac{B_0 - D_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q_0(t_0) dt_0}{t_0 - \tau_0} = P_1(\tau_0), \quad \tau_0 \in L_0, \quad (5)$$

де

$$P_1(\tau_0) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^2 \int_{L_k} \left(\frac{-B_0}{\xi_k - \tau_0} + \frac{D_0}{\overline{\xi_k - \tau_0}} \right) Q_k(t_k) dt_k + \frac{D_0}{2\pi} \sum_{k=1}^2 \int_{L_k} \left(\frac{1}{\overline{\xi_k - \tau_0}} - \frac{\xi_k - \tau_0}{(\xi_k - \tau_0)^2} \right) \overline{Q_k(t_k) dt_k};$$

$$A_0 = i [1 + \kappa_+ + \Gamma_0(1 + \kappa_-)] / 2; \quad B_0 = \kappa_+ - \Gamma_0 \kappa_-;$$

$$D_0 = 1 - \Gamma_0; \quad \Gamma_0 = G_+ / G_- \quad (6)$$

$\kappa_{\pm} = \frac{3 - \mu_{\pm}}{1 + \mu_{\pm}}, \beta_{\pm}^t = \frac{\alpha_{\pm} E_{\pm}}{1 + \mu_{\pm}}$ – величини, які характеризують плоский напружений стан ($\kappa_{\pm} = 3 - 4\mu_{\pm}, \beta_{\pm}^t = \alpha_{\pm} E_{\pm}$ – для плоскої деформації); μ_+, μ_- , E_+, E_- , G_+, G_- – коефіцієнт Пуассона, модуль пружності, модуль зсуву верхньої (нижньої) півплощини відповідно.

Розв'язок рівняння (5) має вигляд [1]

$$Q_0(\tau_0) = k_1 P_1(\tau_0) - \frac{k_2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_1(\tau_0)}{t_0 - \tau_0} dt_0, \quad (7)$$

де $k_1 = 2(B_0 - D_0) / [4A_0^2 + (B_0 - D_0)^2]$;

$$k_2 = 4A_0 / [4A_0^2 + (B_0 - D_0)^2].$$

Підставивши розв'язок (7) в (3), одержимо комплексні потенціали напружень, в яких відсутня невідома функція $Q_0(t_0)$:

$$\Phi(z) = \Phi_1(z) + \Phi_2(z);$$

$$\Psi(z) = \Psi_1(z) + \Psi_2(z), \quad (8)$$

де

$$\begin{aligned} \Phi_2(z) &= \frac{1 - \Gamma_0}{2\pi(1 + \kappa_- \Gamma_1)} \sum_{k=1}^2 \int_{L_k} \left[\frac{Q_k(t_k) dt_k}{z - \bar{\xi}_k} + \frac{(\xi_k - \bar{\xi}_k) Q_k(t_k) dt_k}{(\xi_k - z)^2} \right]; \\ \Psi_2(z) &= \frac{1 - \Gamma_0}{2\pi(1 + \kappa_- \Gamma_1)} \sum_{k=1}^2 \int_{L_k} \left\{ \frac{\bar{\xi}_k Q_k(t_k) dt_k}{(\xi_k - z)^2} + \left[\frac{(\bar{\xi}_k - \xi_k)(\bar{\xi}_k + z)}{(\xi_k - z)^3} - \frac{1}{\xi_k - z} \right] Q_k(t_k) dt_k \right\}. \end{aligned} \quad (9)$$

$$+ \frac{1}{1 + \kappa_- \Gamma_0} \left[\frac{B_n(\xi_k - \bar{\xi}_k)}{T_{nk}^2} + \frac{D_n}{T_{nk}} - \frac{d\bar{\tau}_n}{d\tau_n} D_n \cdot \frac{H_{kn}}{T_{nk}^2} \right]$$

$$R_{nk}^1(t_k, \tau_n) = \frac{B_n}{H_{kn}} - \frac{D_n}{H_{kn}} \cdot \frac{d\bar{\tau}_n}{d\tau_n};$$

$$S_{nk}^1(t_k, \tau_n) = -D_n \left[\frac{1}{H_{kn}} - \frac{d\bar{\tau}_n}{d\tau_n} \frac{H_{kn}}{H_{kn}^2} \right];$$

Відзначимо, що вибір комплексних потенціалів у вигляді (8), з урахуванням (4) і (9), забезпечує тотожне задоволення крайової умови (1) на контурі L_0 , внаслідок чого невідома функція $g_0(t_0)$ виключається з розгляду, а система інтегральних рівнянь, яку одержимо після задоволення решти крайових умов, зменшується з трьох до двох.

III. Розтяг пластини

Нехай на безмежності пластини розтягується зовнішніми напруженнями p , напрямленими перпендикулярно до лінії тріщини L_2 (рис. 1). Комплексні потенціали напружень для цього випадку виберемо у вигляді

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \Phi_0(z) + \Phi_1(z) + \Phi_2(z), \\ \Psi(z) &= \Psi_0(z) + \Psi_1(z) + \Psi_2(z), \end{aligned} \quad (10)$$

де $\Phi_0(z) = p/2$, $\Psi_0(z) = -p/2$ - величини, що визначають напружений стан суцільної однорідної площини [5].

Задовольнивши за допомогою комплексних потенціалів (8) з врахуванням (9), (4) крайові умови (1) на контурі L_1 і (2) на тріщині L_2 , одержимо систему двох сингулярних інтегральних рівнянь стосовно двох невідомих функцій $Q_1(t_1)$, $Q_2(t_2)$:

$$\begin{aligned} A_n Q_n(\tau_n) + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^2 \int_{L_k} [R_{nk}(t_k, \tau_n) Q_k(t_k) dt_k + S_{nk}(t_k, \tau_n) \overline{Q_k(t_k) dt_k}] = P(\tau_n), \quad n = 1, 2, \end{aligned} \quad (11)$$

де

$$\begin{aligned} R_{nk}(t_k, \tau_n) &= R_{nk}^1(t_k, \tau_n) - \frac{1}{1 + \kappa_- \Gamma_0} \left\{ \frac{B_n}{T_{nk}} + \frac{D_n(\bar{\xi}_k - \xi_k)}{T_{nk}^2} + \frac{d\bar{\tau}_n}{d\tau_n} D_n \cdot \frac{(2\eta_n - \xi_k - \bar{\eta}_n)(\bar{\xi}_k - \xi_k)}{T_{nk}^3} - \frac{1}{T_{nk}} \right\}; \end{aligned} \quad (12)$$

$$S_{nk}(t_k, \tau_n) = S_{nk}^1(t_k, \tau_n) +$$

$$A_n = \delta_n [1 + \kappa_1 + \Gamma_1(1 + \kappa_-)] / 2; \Gamma_1 = G_1 / G_-;$$

$$\delta_n = \begin{cases} 1, & n = 1, \\ 0, & n = 2; \end{cases}$$

$$B_n = (\kappa_1 - \Gamma_1 \kappa_- - 1) \delta_n + 1; D_n = (2 - \Gamma_1) \delta_n - 1; (n = 1, 2);$$

$$P(\tau_n) = \delta_n \left\{ -B_1 \Phi_0(\eta_n) + \right.$$

$$\left. + C_1 \left[\overline{\Phi_0(\eta_n)} + \frac{d\bar{\tau}_n}{d\tau_n} (\eta_n \overline{\Phi_0'(\eta_n)} + \overline{\Psi_0(\eta_n)}) \right] \right\} +$$

$$+ (1 - \delta_n) \left\{ -\Phi_0(\eta_n) - \overline{\Phi_0(\eta_n)} - \left[\eta_n \overline{\Phi_0'(\eta_n)} + \overline{\Psi_0(\eta_n)} \right] \right\};$$

$$\eta_n = \tau_n + z_n^0;$$

$$H_{kn} = \xi_k - \eta_n; T_{nk} = \xi_k - \bar{\eta}_n.$$

У частинному випадку однорідних півплощин ($G_+ = G_-$) інтегральні рівняння (11), (12) збігаються з одержаними раніше для площини з включенням і тріщиною [7].

Система інтегральних рівнянь (11) має єдиний розв'язок для довільної правої частини, якщо виконується умова, яка забезпечує однозначність переміщень після обходу контуру тріщини L_2 :

$$\int_{L_2} g_2'(t_2) dt_2 = 0. \quad (13)$$

Коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН) K_1 і K_2 у вершинах тріщини знаходимо за формулою [5]

$$K_1^\pm - iK_2^\pm = \mp \lim \left[\sqrt{2\pi} |t - l^\pm| Q_2(t_2) \right], \quad (14)$$

де K_1^-, K_2^- - відповідають лівій (l^-), а K_1^+, K_2^+ - правій (l^+) вершині тріщини.

IV. Числовий аналіз

Нехай тріщина завдовжки $2l$ з центром у точці $(0, -h)$ – розташована паралельно до лінії розділу півплощин L_0 . Центр кругового включення радіуса R знаходиться на лінії тріщини на віддалі d від центра тріщини (рис. 1). Безрозмірні КІН $F_i^\pm = K_i^\pm/p\sqrt{l}$, ($i = 1, 2$) зображені на рис. 2–4.

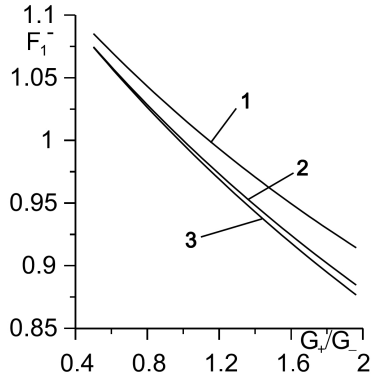


Рис. 2а. Залежність КІН F_1^- від G_+/G_- . Криві 1, 2, 3 відповідають значенням $G_1/G_- = 0,5$; $G_1/G_- = 1$; $G_1/G_- = 2$

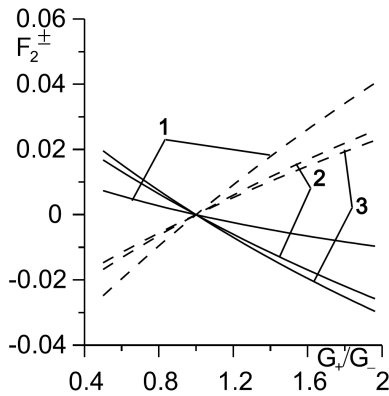


Рис. 2б. Залежність КІН F_2^\pm від G_+/G_- . Криві 1, 2, 3 відповідають значенням $G_1/G_- = 0,5$; $G_1/G_- = 1$; $G_1/G_- = 2$

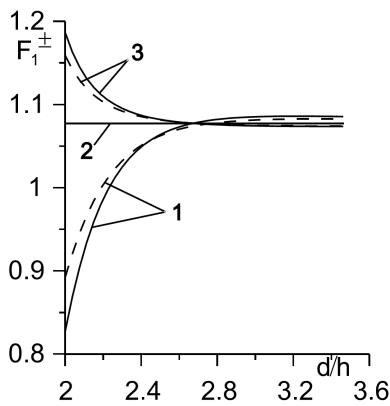


Рис. 3. Залежність КІН F_1^\pm від d/h при $G_+/G_- = 0,5$. Криві 1, 2, 3 відповідають значенням $G_1/G_- = 0,5$; $G_1/G_- = 1$; $G_1/G_- = 2$

Суцільні криві відповідають КІН F_i^- у лівій вершині тріщини $x_2 = -l$ (ближче до включення), штрихові – КІН F_i^+ у правій вершині $x_2 = l$. Числові результати одержано методом механічних квадратур [5] для різних значень механічних і геометричних параметрів задачі за $l/h = 0,5$; $d/h = 3$; $R/h = 0,5$; $\kappa_+ = \kappa_- = \kappa_1 = 2$.

Збільшення жорсткості включення (модуля зсуву G_1) зумовлює зменшення КІН F_1^- (рис. 4) для різних значень жорсткості верхньої півплощини (G_+). Аналогічна залежність спостерігається і за збільшення жорсткості верхньої півплощини для різних значень жорсткості включення (рис. 2).

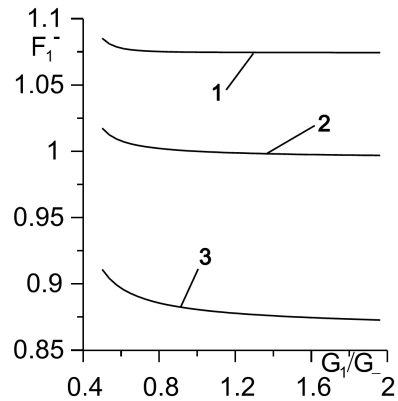


Рис. 4. Залежність КІН F_1^- від G_1/G_- . Криві 1, 2, 3 відповідають значенням $G_1/G_- = 0,5$; $G_1/G_- = 1$; $G_1/G_- = 2$

V. Висновки

Отримано систему двох інтегральних рівнянь задачі теорії пружності для трикомпонентної пластини (дві спаяні півплощини з включенням в одній з них) з тріщиною. Відсутність невідомої функції на контурі спаю півплощин дає змогу простіше знаходити числовий розв'язок системи двох рівнянь.

В умовах одновісного розтягу двох неоднорідних півплощин з включенням і тріщиною перпендикулярно до лінії розділу півплощин (в межах зміни розглянутих параметрів) основний вплив на збільшення коефіцієнта інтенсивності напружень K_1^\pm має зменшення жорсткості верхньої півплощини. Вплив жорсткості включення – не істотний. Крім того, якщо верхня півплощина менш жорстка, ніж нижня, то вплив жорсткості включення на КІН K_1^- якісно відрізняється від випадку двох однорідних півплощин з включенням і тріщиною. Зокрема, якщо включення менш жорстке (більш жорстке), ніж нижня півплощина, то з віддаленням тріщини від включення КІН K_1^\pm збільшуються (зменшуються). В усіх розглянутих випадках значення КІН K_2^\pm на порядок менші за абсолютною величиною, ніж значення КІН K_1^\pm .

Література

- [1] Гахов Ф.Д. Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
- [2] Григолюк Э.И. Грингауз М.Г. Фильштинский Л.А. Об одном подходе к исследованию сингулярных полей напряжений в кусочно-однородной среде с ветвящимися трещинами // Докл. АН СССР. – 1981. – 261, № 3. – С. 507–570.
- [3] Гриліцький Д.В., Луцишин Р.М. Напруження в пластині з круговою лінією розділу граничних умов. – Львів: Вища шк., 1975. – 114 с.
- [4] Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. – М.: Наука, 1982. – 343 с.
- [5] Саврук М.П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1981. – 324 с.
- [6] Саврук М.П., Зеленьяк В.М. Плоская задача теплопроводности и термоупругости для двух спаянных разнородных полуплоскостей с криволинейными включениями и трещинами // ФХММ. – 1983. – 24, № 2. – С. 23–28.
- [7] Саврук М.П., Тимошук Н.В. Сингулярные интегральные уравнения плоской задачи теории упругости для бесконечного кусочно-однородного тела с трещинами // ФХММ. – 1984. – 20, № 6. – С. 73–79.
- [8] Саврук М.П., Тимошук Н.В. Периодическая задача плоской теории упругости для кусочно-однородной плоскости с трещинами // Прикл. механ. – 1986. – № 6. – С. 125–128.
- [9] Саврук М.П., Тимошук Н.В., Прокопчук І.В. Напряженное состояние композитного двухкомпонентного кольца с трещинами // Пробл. прочности. – 1987. – №12. – С. 35–38.
- [10] Theocaris P.S., Ioakimidis N.I. The inclusion problem in plane elasticity // Quart. J. Mech. and Appl. Math. – 1977. – 30, № 4. – P. 437–448.

STRESSES IN BONDED HETEROGENEOUS HALF-PLANES WITH INCLUSION AND CRACK UNDER TENSION

V. Zelenyak ^a, R. Martynyak ^b, B. Slobodyan ^b

^a National University "Lvivska Politechnika"
12 S. Bandera Str., 79013, Lviv, Ukraine
^b

A two-dimensional problem of an elastic for three component plane (two bonded heterogeneous half-planes with inclusion) which include crack are considered. The problem is reduced to the system of two singular integral equations on closed (boundary of inclusion) and unclosed (crack) contours. Numerical solution of these equations was received by the method of mechanical quadrature in the case of circular inclusion and rectilinear crack which is parallel to junction line of the half-planes in case of unidirectional tension. Numerical results of the problem are presented in the form of stress intensity factors at the tips of crack as function of elastic properties inclusion and half-planes, and also as function of the distance between the crack and the inclusion.

Keywords: crack, inclusion, tension

2000 MSC: 74F05

УДК: 539.3