ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
**"Фізико-математичні науки"**
Вип.696 № 696, (2011) с. 93–100

JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY
"LVIVSKA POLITECHNIKA"
**"Physical & mathematical sciences"**
Vol.696 No 696, (2011) 93–100

# МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЕКОНОМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ МЕТОДАМИ НЕРІВНОВАЖНОЇ СТАТИСТИЧНОЇ МЕХАНІКИ

Б. В. Гнатів[a], Р. М. Токарчук[a], П. П. Костробій[a], М. В. Токарчук[a, b]

[a] *Національний університет "Львівська політехніка"*
*вул. С. Бандери 12, 79013, Львів, Україна*
[b] *Інститут фізики конденсованих систем НАН України*
*вул. Свенціцького 1, 790011, Львів, Україна*

*(Отримано 3 лютого 2011 р.)*

Методом нерівноважного статистичного оператора Зубарєва отримано узагальнене рівняння Фоккера-Планка для функції розподілу ліквідних накопичень з означенням узагальненої швидкості та ядер переносу, які описують динамічні кореляції між ліквідними накопиченнями різних категорій сімей. Розглянуто базову модель ринкової економіки в закритому суспільстві на основі системи рівнянь для накопичень та ціни умовного товару.

**Ключові слова:** функції розподілу ліквідних накопичень, рівняння Фоккера-Планка, модель ринкової економіки.

**PACS:** 89.65.Gh,89.75.Da

**УДК:** 536

## I. Вступ

У галузі сучасної теоретичної економіки значні успіхи пов'язані із новим напрямком, який інтенсивно розвивається і відомий як "фізична економіка-econophysica"[1], яка ґрунтується на природничих законах (законах фізики та основних рівняннях переносу фізичних процесів). Природно, що сучасні методи статистичної фізики, які описують рівноважні та нерівноважні, стаціонарні та нестаціонарні стани взаємодіючих відкритих систем знайшли своє застосування до опису еволюції економічних систем, зокрема фінансових ринків [2, 3, 4]. Цей напрямок формувався під час розвитку еволюційної економіки [5, 6], синергетичної економіки [7, 8, 9, 10, 11]. Важливість і значення застосування сучасних методів нерівноважної статистичної фізики для опису економічних процесів продемострували автори роботи [12], у якій наведені динамічні моделі мікро- і макроекономіки у сучасній Росії. Проблеми опису економічних процесів та їх прогнозування, зокрема в Україні, з використанням методів статистичної механіки і термодинаміки наведені у роботах [13, 14, 15]. Сьогодні сформувались три основні напрямки у фізичній економіці [10]. Перший зводиться до досліджень часових рядів, що описують зміну обміну курсів валют, вартості цінних паперів, товарів, послуг тощо. Другий – представляє сітковий аналіз економічних систем, у межах якого кожному агенту (країні, підприємству, трейдеру, товару чи послузі) приписується вузол складної сітки із зв'язками. Третій – зводиться до досліджень розподілу внутрішніх валових продуктів країн та індивідуальних доходів, а також розподілу фірм за чисельністю зайнятих робочих, основного капіталу, кількості реалізованого товару тощо. Розвиток цього напрямку вимагає застосування статистичного аналізу складних систем, зокрема застосування сучасних методів статистичної фізики [12, 16]. Одним із об'єктів досліджень фізичної економіки є фінансовий ринок як складна статистична система, поведінка якої непередбачувана через велику кількість факторів, що впливають на динаміку цін [4]. Простим методом прогнозування поведінки такої системи є зіставлення наявного стану ринку з попереднім [17]. Таке порівняння характеризується взаємозв'язком між інформацією, що надходить (зводиться до набору професійних знань про внутрішні та зовнішні фактори, які визначають динаміку макроекономічних величин (процентної ставки, інфляції, профілю зміни цін тощо)) та реакцією фінансового ринку, яка визначається кореляцією між інформацією про попередній стан ринку і наступною зміною цін. Якщо на великих проміжках часу фіксування інформації та цін відповідний корелятор їм приймає не нульове значення, встановлюється когерентний стан фінансового ринку, еквівалентний домовленостям трейдерів про дотримання певної стратегії [11, 18]. Іншим важливим завданням фізичної економіки є з'ясування умов еволюції низькопродуктивного стану у високопродуктивний, з одного боку, і опису картини переходу між ними (економічної кризи, або економічного успіху), з іншого [12]. Важливішою проблемою є еволюції розподілу доходів у ринковій економіці, у якій особливе місце займає збалансована система оподаткування. Саме такі проблеми є предметом досліджень цієї роботи із використанням методів нерівноважної статистичної фізики [12, 16, 19, 20]. Зокрема, проблеми гідродинамічного опису кінетичної моделі консервативної економіки досліджувались у недавній роботі [21].

В останні роки, у дослідженнях еволюції розподілу доходів у простій ринковій економіці часто використовувались методи, запозичені з кінетичної теорії розріджуваних газів [22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29]. У більшості основних кінетичних моделей типу Больцмана ринок представлений як ідеальний газ, де кожну молекулу ідентифікують з агентом, і кожна торгова подія між двома агентами вважається еластичною (грошовою), зберігаючи зіткнення між двома молекулами. В основі ідеї є те, що торговий ринок, сформований з достатньо великої кількості агентів, може бути описаний законами статистичної механіки, як це трапляється у фізичній системі, що складається з багатьох взаємодіючих частинок. Якщо погоджуватися з вимогою, що є глибокі аналогії між економікою і фізикою, тоді різні добре обґрунтовані фізичні методи могли б застосовуватися в аналізі розподілу доходів в економічних системах. Зокрема, якщо ідентифікувати гроші в економіці з енергією, застосування статистичних методів фізики дає можливість краще зрозуміти розвиток "хвостів"в розподілах доходів реальних економічних систем. У кінетичних моделях простих ринкових економік, фактично, знання поведінки великих доходів сталої густини є першорядною важливістю, оскільки це визначає емпірично, чи модель відповідає даним реальної економіки. Ототожнення доходів з енергією роз'яснює, що проблема опису поведінки доходів протягом великого часу в кінетичній моделі типу, що розглядаються у посиланнях [22–29], є аналогом проблеми опису поведінки густини енергії протягом великого часу на основі просторово однорідних рівнянь Больцмана як в еластичних [30], так і нееластичних випадках [31, 32]. Зокрема, для неконсервативних кінетичних моделей, цю аналогію нещодавно описали в [33]. У цьому напрямку важливими є результати статті [34], у якій обговорювалась концепція статистичного опису швидкості грошового обігу.

У роботі, використовуючи метод нерівноважного статистичного оператора Зубарєва [19, 20] отримано узагальнене рівняння Фоккера-Планка для функції розподілу ліквідних накопичень з означенням узагальненої швидкості та ядер переносу, які описують динамічні кореляції між ліквідними накопиченнями $U_f$ і $U_{f'}$ різних $f, f'$ категорій сімей. Ці функції визначаються через вагову функцію $W(U)$, яку можна розрахувати методами функціонального інтегрування. Розглянуто базову модель ринкової економіки в закритому суспільстві на основі системи рівнянь для накопичень та ціни умовного товару.

## II. Узагальнене рівняння Фоккера–Планка для функції розподілу ліквідних накопичень

У будь-якій сучасній державі економічна структура визначається розподілом елементів суспільства (членів сімей) за ліквідними накопиченнями, які описуються функцією розподілу $\rho\left(\hat{U};t\right)$, де $\hat{U}$ – накопичення, до яких належать грошові одиниці та цінні папери, які можуть швидко і без втрат конвертуватись у гроші. Майно, тобто машини, квартири, будинки не входять у ліквідні накопичення. Сім'ї можна поділити на:

- багаті — сім'ї з високим рівнем доходів;
- заможні — сім'ї з середнім рівнем доходів;
- бідні — сім'ї з низьким рівнем доходів.

Індикатором економічної стабільності сучасних високорозвинутих успішних держав є порівняно високий відсоток **заможних** сімей. Для опису економічної структури у високорозвинутих державах використовують функцію розподілу $\rho(y;t)$ сімей за доходами, де $y$ — дохід сім'ї за одиницю часу. Розподіли $\rho\left(\hat{U}\right)$ і $\rho(y)$ різні, хоча і зв'язані між собою. Функції $\rho\left(\hat{U}\right)$ і $\rho(y)$ можна знайти, використовуючи згадані вище методи (опитування, аналіз даних і експертні оцінки). У розвинутих країнах, де податкова система добре організована, розподіл за доходами безпосередньо визначається за податковими деклараціями. Розподіл за накопиченнями можна отримати з аналізу вкладів. В Україні ці методи дають недостовірні результати і ефективнішим є метод реконструкції ЕСС (економічної структури суспільства) за непрямими даними та експертні оцінки.

Оскільки функції розподілу $\rho(\hat{U};t)$ і $\rho(y;t)$ зв'язані між собою, то надалі для опису економічної структури суспільства використовуватимемо функції розподілу $\rho\left(\hat{U};t\right)$. Очевидно різні категорії сімей в економічних процесах держави отримуватимуть різні середні значення накопичення протягом певного спостережуваного часу $t$:

$$\langle\hat{U}_m\rangle^t, \quad \langle\hat{U}_s\rangle^t, \quad \langle\hat{U}_n\rangle^t, \tag{1}$$

де $\hat{U}_m$, $\hat{U}_s$, $\hat{U}_n$ — випадкові функції накопичення відповідно сімей з високим, середнім і низьким рівнями доходів. Середні значення в (1) визначаються за допомогою функції розподілу $\rho(\hat{U};t) = \rho(\hat{U} = \{\hat{U}_f\};t)$:

$$\langle\ldots\rangle^t = \int \ldots \rho(\hat{U};t) d\hat{U}. \tag{2}$$

Функції $\hat{U}_m$, $\hat{U}_s$, $\hat{U}_n$ в економічних процесах зазнають нелінійних флуктуацій і зв'язані із купівельною здатністю $r_f = \frac{U_f}{p}$, де $p$ — ціна відповідного товару,

$f=\{m,s,n\}$. Для того, щоб їх врахувати під час розрахунку середніх (1) операцію усереднення подамо у функціональному вигляді

$$\langle\ldots\rangle^t=\int\ldots\nu(U)\rho(U;t)dU, \qquad (3)$$

$$\nu(U)=\prod_f\delta\left(\hat U_f-U_f\right), \qquad (4)$$

$$dU=\{dU_m dU_s dU_n\},$$

де функціонал $\rho(U;t)$ в методі нерівноважного статистичного оператора [19, 20] задовольняє узагальнене рівняння Фоккера-Планка (у марківському наближенні):

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(U;t)+\sum_f\frac{\partial}{\partial U_f}V_f(U)\rho(U;t)= \\ =\sum_{f,f'}\frac{\partial}{\partial U_f}L_{f,f'}(U)\frac{\partial}{\partial U_{f'}}\left\{\frac{\rho(u;t)}{W(U)}\right\}, \qquad (5)$$

$V_f(U=\hat U)$ — швидкість зміни ліквідних накопичень $f=\{m,s,n\}$-ю категорією сімей:

$$V_f(U)=\frac{\langle\nu(U)\dot{\hat U}_f\rangle_U}{W(U)}, \qquad (6)$$

де

$$\dot{\hat U}_f=P_f(\hat U)-Q_f(\hat U), \qquad (7)$$

$P_f(\hat U)$ — дохід, $Q_f(\hat U)$ — функція попиту для $f$-ї сім'ї.

$$W(U)=\int\delta(\hat U-U)dU. \qquad (8)$$

$W(U)$ — вагова функція, $\langle(...)\rangle_U=\int(...)\frac{\delta(\hat U_f-U_f)}{W(U)}d\hat U$. $L_{f,f'}(U)$ — ядра переносу, які описують динамічні кореляції між ліквідними накопиченнями $U_f$ і $U_{f'}$ різних $f,f'$ категорій сімей:

$$L_{f,f'}(U)= \\ =\frac{1}{W(U)}\int dU'\int_{-\infty}^{t}dt'e^{\varepsilon(t'-t)}\langle x_f(U)T(t,t')x_{f'}(U')\rangle_U, \quad (9)$$

де

$$x_f(U)=(1-\Pi)\nu(U)\dot{\hat U}_f,$$

$$\Pi A=\int dU\frac{1}{W(U)}\langle A\nu(U)\rangle\nu(U), \qquad (10)$$

$\Pi$ — проекційний оператор. $T(t,t')=e^{-(1-\Pi)iL(t-t')}$ — оператор еволюції в часі, $iL$ — оператор Ліувілля, що відповідає модельному гамільтоніану задачі:

$$H=\sum_f\frac{\hat V_f^2}{2}+\sum_{f,f'}\Phi(f,f')\hat U_f\hat U_{f'}+ \\ +\sum_{f,f'f''}\Phi(f,f',f'')\hat U_f\hat U_{f'}\hat U_{f''}+\ldots. \qquad (11)$$

$$\hat V_f=\frac{d}{dt}\hat U_f \qquad (12)$$

– швидкість ліквідних накопичень $f$-ї сім'ї. $\Phi(f,f')$, $\Phi(f,f',f'')$ — "потенціали" взаємодії ліквідних накопичень різних категорій сімей. При цьому виконується умова $\langle H\rangle=E=const$, $E$ — повна "енергія" ліквідних накопичень.

Для детальнішого вивчення структури функцій ліквідних накопичень приймемо, що повна кількість грошей в державі є $M(t)$, яке розподіляється за всіма категоріями сімей:

$$M(t)=m\langle\hat U_m\rangle^t+s\langle\hat U_s\rangle^t+n\langle\hat U_n\rangle^t, \qquad (13)$$

$$\frac{d}{dt}M(t)=m\frac{d}{dt}\langle\hat U_m\rangle^t+s\frac{d}{dt}\langle\hat U_s\rangle^t+n\frac{d}{dt}\langle\hat U_n\rangle^t= \\ =J_M(t)-J_M^{>}(t)+J_M^{<}(t), \quad (14)$$

де $J_M(t)$ — загальний потік грошей всередині держави, $J_M^{>}(t)$ — загальний потік грошей із держави і $J_M^{<}(t)$ — загальний притік грошей у державу. $N=m+s+n$ – повна кількість сімей у державі. Аналізуючи (7), бачимо, що дохід і попит кожної сім'ї відповіднодо рівняння нерівноважних економічних процесів (5), є основою ліквідних накопичень, значна частка яких у високорозвинутих державах надходить у грошовий оборот через виробництво, нові наукові технології та цінні папери. А це своєю чергою впливає на загальні потоки грошей $J_M(t)$, $J_M^{>}(t)$, $J_M^{<}(t)$, баланс яких і визначає фінансову стабільність держави. $P_f(\hat U)$ і $Q_f(\hat U)$ є взаємозв'язані, що можна дослідити на простій фізичній моделі ринкової економіки закритого суспільства. Структура рівняння Фоккера-Планка значною мірою залежить від розрахунків структурної функції $W(U)$. Гауссове наближення для $W(U)$ можна отримати методом колективних змінних [35]

$$W^G(U)=Z^{-1}\times \\ \times\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{f,f'}[\tilde M_2]^{-1}_{ff'}U_fU_{f'}-\frac{1}{2}\ln\pi\det\tilde M_2\right\}, \qquad (15)$$

$[\tilde M_2]^{-1}_{ff'}$ — елементи матриці, оберненої до матриці $\tilde M_2$, елементами якої є парні кореляційні функції $M_2^{ff'}=\langle\hat U_f\hat U_{f'}\rangle_0$, $\langle\ldots\rangle_0=\int...\rho_0(\hat U)d\hat U$ , $\rho_0(\hat U)$ — рівноважний розподіл накопичень усіх категорій сімей, $Z$ — його статистична сума. Розрахувавши у гауссовому наближенні усі характеристики у рівнянні Фоккера-Планка (5), для середніх значень $\langle\hat U_m\rangle^t$ , $\langle\hat U_s\rangle^t$, $\langle\hat U_n\rangle^t$ отримаємо систему рівнянь:

$$\frac{d}{dt}\langle\hat U_f\rangle^t+\sum_{f'}i\Omega_{ff'}\langle\hat U_{f'}\rangle^t- \\ -\sum_{f'}\int_{-\infty}^{t}e^{\varepsilon(t'-t)}\Xi_{ff'}(t,t')\langle\hat U_{f'}\rangle^{t'}dt'=0, \quad (16)$$

де

$$i\Omega_{ff'}=\sum_{f''}\langle\dot{\hat U}_f\hat U_{f''}\rangle_0[\tilde M_2]^{-1}_{f''f'} \qquad (17)$$

— частотна матриця,

$$\Xi_{ff'}(t,t') = \sum_{f''} \langle I_f(\hat{U}) T_0(t,t') I_{f''}(\hat{U}) \rangle_0 [\tilde{M}_2]^{-1}_{f''f'} \quad (18)$$

— функції пам'яті, які описують дисипативні процеси під час зміни накопичень між різними категоріями сімей у суспільстві.

$$I_f(\hat{U}) = (1-P)\dot{\hat{U}}_f$$

— узагальнені потоки, $P$ — проекційний оператор Морі, який має таку структуру:

$$P\hat{A} = \sum_{f''f'} \langle \hat{A}\hat{U}_{f''} \rangle_0 [\tilde{M}_2]^{-1}_{f''f'} \hat{U}_{f'}$$

і має такі властивості: $P(1-P) = 0$, $P\hat{U}_f = \hat{U}_f$.

Отримана система рівнянь є замкнутою і враховує колективні дисипативні процеси зміни накопичень між різними категоріями сімей. Вона може бути застосована до опису процесів обміну накопиченнями між різними категоріями сімей у суспільстві за заданих правил (11), гарантованих державою.

## III. Базова модель ринкової економіки в закритому суспільстві

Розглядатимемо базову модель ринкової економіки в закритому суспільстві. У цьому випадку мета побудови моделі – з'ясувати, у яких станах може функціонувати самодостатня країна в умовах ринкової економіки та за відсутності впливу інших країн, скільки таких станів і які переходи між ними. Слово "самодостатня" означає, що країна має у своєму розпорядженні достатні ресурси та не має потреби в імпорті та експорті.

Базова модель претендує на опис критичних (кризових) явищ, таких, як зникнення одного з стаціонарних станів і перехід в інші стани. Останнє може відбуватися, зокрема, у результаті зміни параметрів. Процеси, зумовлені повільними змінами параметрів (за рахунок технічних інновацій), розглянута базова модель не описує. Це питання залишається прерогативою еволюційної економіки.

Така постановка завдання у фізиці аналогічна дослідженню фазових станів і фазових переходів в ізольованій системі.

Слова "ринкова економіка" означають, що ціна продукту визначається балансом попиту та пропозиції і засоби виробництва перебувають у приватних руках "власників". Ця група людей (позначимо їхню кількість $m$) отримує доходи від продажу виробленої продукції. Їхні витрати включають витрати на особисті потреби і виробничі витрати. Інша група людей — "працівники" одержує доходи у вигляді зарплати і витрачає її на особисті потреби. Роль "власників" і "працівників" у суспільстві різна — перші активні, тобто вони можуть підбирати деякі параметри для максимізації або доходу, або своїх накопичень; другі пасивні, тобто на параметри не впливають. Витрати на особисті потреби визначаються функцією попиту, витрати власників — виробничою функцією, накопичення як "власників", так і "працівників" — балансом доходів і видатків. При цьому держава не бере участь безпосередньо в керуванні економічними процесами.

При формулюванні базової моделі зробимо кілька припущень, які спростять нашу задачу: будуватимемо модель у так званому єдино-продуктовому наближенні, яке часто використовується у теоретичній економіці. Це означає, що сировина, а також продукти усіх категорій та послуги (транспорт, зв'язок тощо) об'єднуються у один агрегований продукт. Попит на цей єдиний продукт визначається сумарною функцією попиту $Q(r)$. Виробничі витрати у такій моделі зводяться лише до оплати праці. Приймемо, що кількість грошей у суспільстві – величина фіксована і дорівнює $M$. Це означає, що має місце закон збереження суми накопичень "власників" $U_m$ та "працюючих" $U_n$:

$$nU_n + mU_m = M, \quad n + m = N, \quad (19)$$

де $N$ — кількість економічно активних людей, $n$ — кількість "працівників", $m$ — кількість "власників". Параметр $M$ має такі властивості. При повільній (адіабатичній) зміні $M$, такій, що ціна $p$ та накопичення встигають відслідкувати ці зміни, стан суспільства не змінюється. Така зміна фактично рівносильна деномінації. Швидка зміна $M$ може істотно вплинути на стан суспільства, особливо, якщо емітовані гроші адресуються визначеній групі (адресна емісія). Прийнявши ці зауваження та враховуючи (17), коли ядра переносу є сталими, базову модель можна подати у вигляді:

$$\frac{dU_m}{dt} = \frac{p}{m}\left[nQ\left(\frac{U_n}{p}\right) - nP_1\right], \quad (20)$$

$$\frac{dp}{dt} = \gamma\left[nQ\left(\frac{U_n}{p}\right) + mQ\left(\frac{gU_m}{p}\right) - F_m\right],$$

де $P_1(U_m/p)$ — заробітна плата в натуральних одиницях, яку виплачують "працівникам" "власники". У разі відрядної оплати праці заробітна плата пропорційна кількості виготовленого продукту:

$$nP_1 = h\, m\, F\left((1-g)\, r_m\right). \quad (21)$$

Коефіцієнт $h$ менше від одиниці та величина $(1-h)$ являє собою додатковий продукт, $g$ — частка накопичень власників, яку вони витрачають на власні потреби, $F$ — виробнича функція, що залежить від оборотних засобів. У цьому разі оборотні засоби:

$$r = (1-g)\frac{U_m}{p} = (1-g)r_m, \quad (22)$$

$\gamma$ — коефіцієнт, що відображає швидкість встановлення ринкової ціни. Змінна $U_m$ не є незалежною, і відповідно до (19):

$$U_n = \frac{M - mU_m}{n}.$$

Потім для проведення числових розрахунків введемо безрозмірні змінні:

$$n' = \frac{n}{N}, m' = \frac{m}{N}, U_n' = \frac{U_n}{\bar{U}} = \frac{M - mU_m}{n\bar{U}} = \frac{1 - m'U_m'}{n'},$$

$$U_m' = \frac{U_m}{\bar{U}}, p' = \frac{p}{p_0},$$

де $\bar{U} = M/N$ — середні накопичення, $p_0 = \bar{U}/r_0$, де $r_0$ — параметр функції попиту $Q(r)$. Надалі приймемо $r_0 = 1$, тобто вимірюватимемо споживчу спроможність в одиницях, що забезпечують прожитковий мінімум. Для якісних досліджень моделі (20) зручно перейти до змінних $x = U_m'$ та $y = p^{-1}$. Тоді:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{m'y}\left[n'Q\left(\frac{1-m'x}{n'}\right) - m'hF\left((1-g)\,xy\right)\right], \tag{23}$$

$$\frac{dy}{dt} = -y^2\gamma\frac{N^2}{M}\left[n'Q\left(\frac{1-m'x}{n'}y\right) + m'Q(gxy) - \right.$$
$$\left. - m'F((1-g)xy)\right],$$

У нових змінних $U_n' = (1 - m'x)/n'$. Надалі штрихи опустимо. Нами були проведені числові розрахунки моделі (23) з використанням безрозмірної функції попиту:

$$Q^* = \frac{Q_1}{Q_{1,0}} = \frac{1}{1 + \frac{r_{1,0}}{r}},$$

$$r_{1,0} = \frac{U_{1,0}}{p}, \quad r = \frac{\bar{U}}{p} \Rightarrow Q^* = \frac{1}{1 + \frac{U_{1,0}}{\bar{U}}},$$

де $U_{1,0}$ (мінімальні накопичення) ототожнені з $U_n$ (накопичення робітників). Тоді отримуємо:

$$Q^* = \frac{1}{1 + \frac{U_n}{\bar{U}}} = \frac{1}{1 + U_n'} = \frac{1}{1 + \frac{1 - m'U_m'}{n'}} = \frac{1}{1 + \frac{1 - m'x}{n'}}. \tag{24}$$

Фазовий портрет системи (23) з використанням (24) наведений на рис. 1.

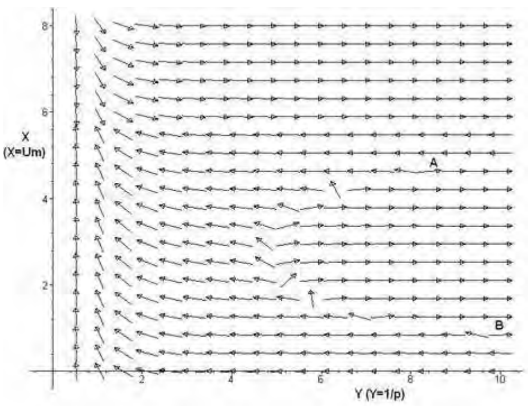


Рис. 1. Залежність безрозмірної величини накопичень "власників" від безрозмірної ціни умовного товару за умови $U_{1,0} = U_n$.

Крім того, було розглянуто ще два випадки: коли $\dot{F} = 0$, $F = p * Q$, фазовий портрет наведений на рис. 2; коли $\dot{Q} = 0, Q = F$, фазовий портрет наведений на рис. 3.

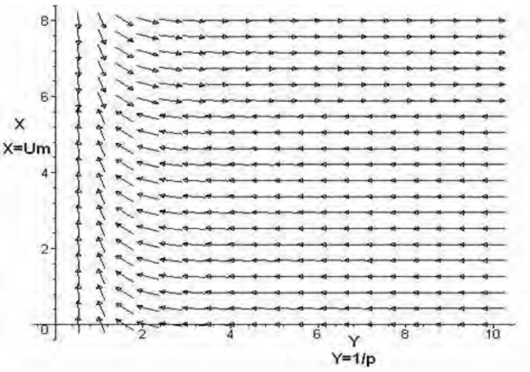


Рис. 2. Залежність безрозмірної величини накопичень "власників" від безрозмірної ціни умовного товару при $U_{1,0} = U_n$ та $\dot{F} = 0$

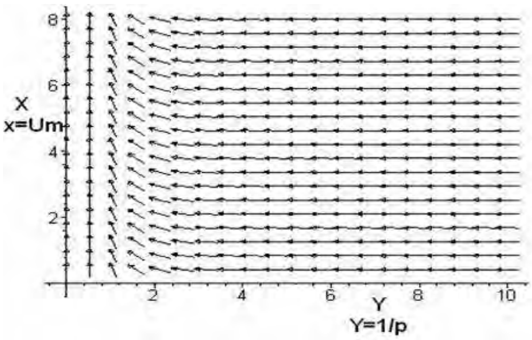


Рис. 3. Залежність безрозмірної величини накопичень "власників" від безрозмірної ціни умовного товару при $U_{1,0} = U_n$ та $\dot{Q} = 0$

Аналізуючи рис. 1, бачимо, що в ділянці високих цін накопичення "власників" спочатку спадають на незначну величину (це можна пояснити деяким спадом попиту), а потім накопичення залишаються сталими і не залежать від рівня умовної ціни (тому що попит змінюється обернено пропорційно до умовної ціни, так, що дохід "власників" залишається незмінним, або ж в ділянці низьких цін витрати "власників" збільшуються на вдосконалення виробничої функції у разі зростання попиту на умовний товар). Розглянемо ще дві підділянки, на які умовно поділено фазовий портрет кривою AB. В ділянці праворуч спостерігається стабільність накопичень за низької умовної ціни, тобто схожа ситуація як і в попередній ділянці. По лівий бік від кривої AB спостерігається тенденція до збільшення накопичень "власників" за збільшення умовної ціни. На рис. 2 спостерігаємо два процеси : перший – зниження накопичень "власників" в ділянці високої умовної ціни; другий – збільшення накопичень "власників" теж в ділянці високої умовної ціни. Оскільки виробнича функція в такому разі є незмінною, то ці два процеси можна пояснити різним попитом на різного роду товар. У ділянці нижчих цін спостерігається стабільність накопичень "власників" (тому що попит змінюється обернено пропорційно до умовної ціни, так, що дохід "власників" залишається незмінним). На рис. 3 спостерігаємо тенденцію до збільшення накопичень "власників" за зростання умовної ціни у разі незмінного попиту на умовний товар.

Ми також дослідили систему рівнянь (20) у випадку коли функція попиту для власників визначається співвідношенням:

$Q\left(gr_m\right) = \frac{(1-h)}{\tau}\left(1-g\right)\frac{U_m}{p}$, при $r_m < \frac{F_{max}}{(1-g)}$

$Q\left(gr_m\right) = \left(1-h\right)F_{max}$, при $r_m \geq \frac{F_{max}}{(1-g)}$

Тоді враховуючи структуру виробничої функції та (23), систему рівнянь (20) у безрозмірній формі можна записати у вигляді

$$\frac{d}{dt}x = \frac{1}{m}\left[n\frac{1-mx}{y\left(1-mx\right)+n} - h\left(1-g\right)\frac{m}{\tau}x\right], \qquad (25)$$

$$\frac{d}{dt}y = -y^2\frac{\gamma}{\alpha}\left[n\frac{y\left(1-mx\right)}{y\left(1-mx\right)+n} - h\left(1-g\right)\frac{m}{\tau}xy\right], \qquad (26)$$

$$\frac{d}{dt}x = \frac{1}{m}\left[n\frac{1-mx}{y\left(1-mx\right)+n} - hmF_0\right], \qquad (27)$$

$$\frac{d}{dt}y = -y^2\frac{\gamma}{\alpha}\left[n\frac{y\left(1-mx\right)}{y\left(1-mx\right)+n} - hmF_0\right] \qquad (28)$$

Числовий розрахунок системи рівнянь (25)–(28), був проведений за відповідних значень параметрів $\alpha = 10^{-8}$, $h = 0.1$, $\gamma = 1$, $\tau = 5$ та зміни $m$, $n$, $g$ (частка доходу власників, що витрачається на особисті потреби).

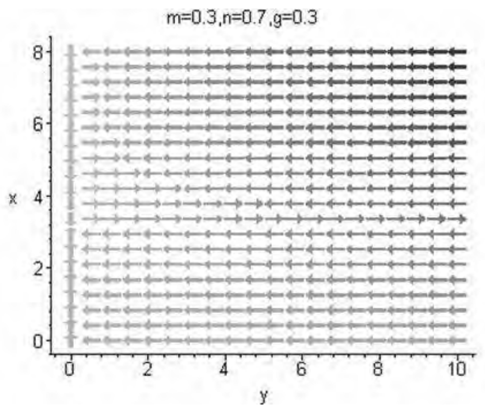


Рис. 4. Залежність безрозмірної величини накопичень "власників" від безрозмірної ціни умовного товару

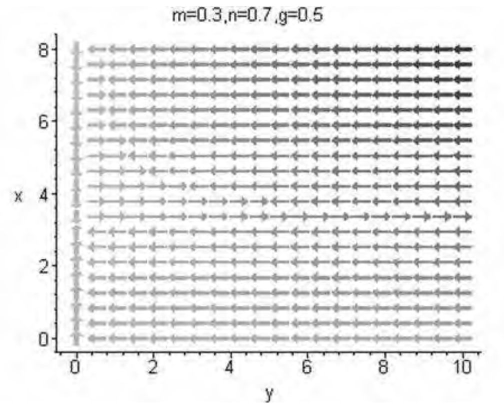


Рис. 5. Залежність безрозмірної величини накопичень "власників" від безрозмірної ціни умовного товару

На рис. 4, рис. 5 бачимо, що за різних часток витрат власників на особисті потреби у разі зростання умовної ціни на товар є певний рівень накопичень власниками, нижче від якого вони не змінюються із зміною ціни. За умовних накопичень в ділянці 4 бачимо два процеси, які описують як втрати власників у разі зростанняі ціни, так і зростання їх накопичень. На рис. 6 зображено результати числових розрахунків системи рівнянь (25)–(28) за граничного значення виробничої функції $F_0$, яка залежить від рівня технології виробництва. Ми спостерігаємо фактично два процеси за високих цін на товар: спочатку накопичення до 2.9 зростають, а потім знижуються і витрачаються на зниження ціни товару. Який механізм зниження ціни на товар ця модель не розкриває, оскільки параметри $h$, $F_0$ є фіксовані.

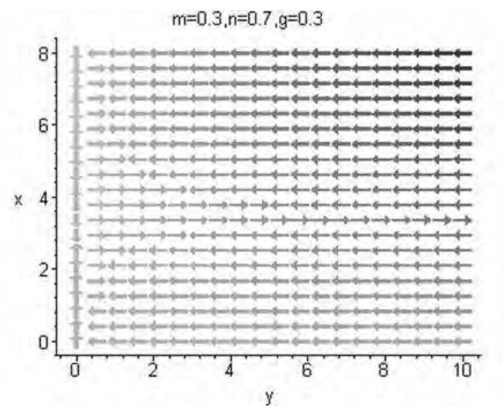


Рис. 6. Залежність безрозмірної величини накопичень "власників" від безрозмірної ціни умовного товару

## IV. Висновки

Методом нерівноважного статистичного оператора Зубарєва з використанням функціонального представлення отримано узагальнене рівняння Фоккера-Планка для функції розподілу ліквідних накопичень з означенням узагальненої швидкості та ядер переносу, які описують динамічні кореляції між ліквідними накопиченнями $\hat{U}_f$ і $\hat{U}_{f'}$ різних $f, f'$ категорій сімей. Ці функції визначаються через вагову функцію $W(U)$, яку можна розрахувати функціональними методами інтегрування. У гауссовому наближені для $W(U)$ за допомогою рівняння Фоккера-Планка отримаємо рівняння переносу для середніх значень накопичень різних категорій членів сімей суспільства.

Розглянуто базову модель ринкової економіки в закритому суспільстві на основі системи рівнянь для накопичень та ціни умовного товару. Проведено числові розрахунки цієї системи в безрозмірній формі та побудовано і проаналізовано фазові портрети залежності безрозмірної функції накопичень та безрозмірної ціни умовного товару. Для випадку, коли $U_{1,0}$ (мінімальні накопичення) ототожнюються з $U_n$ (накопичення робітників), знайдено залежність безрозмірної функції накопичень "власників" від безрозмірної ціни умовного товару.

## Література


[1] Ларуш Л. Физическая экономика как платоновская эпистемологическая основа всех отраслей человеческого знания. – М: Научная книга, 1997 – с. 260.

[2] Mantegna R.N., Stanley H.E. An introduction to econophysics. Correlations and complexity in finance. Cambridge: Cambridge University Press, 1999. – 158.

[3] Bouchaud J-P., Potter M. Theory of financial risks. Cambridge: Cambridge University Press, 2000. – 232.

[4] Voit J. The statistical mechanics of financial markets. Berlin-Heidelberg: Spriger-Verlag, 2001. – 220.

[5] Маевский В.И. Введение в эволюционную экономику. – М.: Япония сегодня, 2000.

[6] Нельсон Р.Р., Уинтер С.Дж. Эволюционная теория экономических изменений. – М: Дело, 2000. – 536 с.

[7] Пу Т. Нелинейная экономическая экономика. – М., 2000.

[8] Занг В.-Б. Синергетическая экономика: Время и перемены в нелинейной экономической теории. – М.: Мир, 1999.

[9] Лебедев В.В. Математическое моделирование социально-экономических процессов. – М.: Изограф, 1997.

[10] Wang Y., Wu J., Di Z. Physics of econophysics. arXiv: cond-mat 0401.0401025.

[11] Олемской А.Й., Ющенко О.В. Синергетическая картина финансового рынка, эволюционирующего в соответствие с поступающей информацией // Механизм регулирования экономики, 2003, No 1. – С.112–117.

[12] Чернавский Д. С., Старков Н. И., Щербаков А. В. О проблемах физической экономики // УФН - 2002. – Т. 172, No 9. – С. 1045–1067.

[13] Юхновський І.Р. Програма майбутнього // Вибрані праці. Економіка., Нац. ун-т "Львівська політехніка 2005. – С. 3–18.

[14] Юхновський І.Р., Грек Н.Л. Бути чи не бути середньому класу. Дзеркало тижня, 2005, No 17 (544), 7–13 травня // Вибрані праці. Економіка, Нац. ун-т "Львівська політехніка 2005. – С.39–48.

[15] Юхновський І.Р. Головна мета - збудувати в Україні суспільство з панівним середнім класом // Дзеркало тижня, 2007, No 14 (643) 14–20 квітня.

[16] Dragulescu A.A. Applications of physics to economics and finance: Money, income, wealth, and the stock market. arXiv:cond-mat 0307341 v.2, 2003. – 29 p.

[17] Wyart M., Bouchaud J.-P. Self-referential behavior, overreaction and conventions in financial markets arXiv:cond-mat 0303.0303584.

[18] Olemskoi A.I. Theory of Structure Trasformations in Non-Equilibrium Condensed Matter. New-York: NOVA Science, 1999. – 285 p.

[19] Zubarev D.N. , Morozov V.G., Röpke G. Statistical Mechanics of Nonequilibrium Processes, vol.2. Berlin, Akademie Verlag, 1997.

[20] Д.Н. Зубарев, В.Г. Морозов, Г. Рёпке. Статистическая механика неравновесных процессов. – М.: Физматлит, 2002. – Т. 2. – 295 с.

[21] During B., Toscani G. Hydrodynamics from kinetic models of conservative economies // Physica A, 2007, vol. 384. – P. 493–506.

[22] Ispolatov S., Krapivsky P.L., Redner S. Wealth distributions in asset exchange models // Eur. Phys. J. B 2 (1998) 267–276.

[23] Dragulescu A., Yakovenko V.M. Statistical mechanics of money // Eur. Phys. J. B 17 (2000) 723-729.

[24] Chakraborti A., Chakrabarti B.K. Statistical mechanics of money: effects of saving propensity // Eur. Phys. J. B 17 (2000) 167–170.

[25] Chakraborti A. Distributions of money in models of market economy // Int. J. Modern Phys. C 13 (2002) 1315–1321.

[26] Hayes B. Follow the money // Am. Sci. 90 (5) (2002) 400–405.

[27] Slanina F. Inelastically scattering particles and wealth distribution in an open economy // Phys. Rev. E 69 (2004) 046102.

[28] Chatterjee A., Chakrabarti B.K., Stinchcombe R.B. Master equation for a kinetic model of trading market and its analytic solution // Phys. Rev. E 72 (2005) 026126.

[29] Cordier S. Pareschi L., Toscani G. On a kinetic model for a simple market economy // J. Stat. Phys. 120 (2005) 253-277.

[30] Cercignani C., Illner R., Pulvirenti M. The Mathematical Theory of Dilute Gases, Springer Series in Applied Mathematical Sciences, vol. 106, Springer, Berlin, 1994.

[31] Bobylev A.V., Carrillo J.A., Gamba I. On some properties of kinetic and hydrodynamics equations for inelastic interactions // J. Stat. Phys. 98 (2000) 743–773.

[32] Bobylev A.V., Cercignani C. Self-similar asymptotics for the Boltzmann equation with inelastic and elastic interactions // J. Stat. Phys. 110(2003) 333–375.

[33] Pareschi L., Toscani G. Self-similarity and power-like tails in nonconservative kinetic models // J. Stat. Phys. 124 (2–4) (2006) 747–779.

[34] Wang Y., Ding N., Zhang L., The circulation of money and holding time distribution // Physica A 324 (3-4) (2003) 665–677.

[35] Юхновский И.Р., Головко М.Ф. Статистическая теория классических равновесных систем. – К.: Наукова думка, 1980.

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ МЕТОДАМИ НЕРАВНОВЕСНОЙ СТАТИСТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Б.В. Гнатив[a], Р.М. Токарчук[a], П.П. Костробий[a], М.В. Токарчук [a,b]

[a] *Национальный университет "Львивська политехника",*
*ул. С. Бандеры, 12, Львов, 79013, Украина*
[b] *Институт физики конденсированных систем НАН Украины*
*ул. Свенцицкого, 1, 79011, Львов, Украина*

Методом неравновесного статистического оператора Зубарева получено обощенное уравнение Фоккера–Планка для функции распределения ликвидных накоплений с определением обобщенной скорости и ядер переноса, описывающих динамические корелляции между ликвидными накоплениями разных категорий семей. Рассмотрено базовую модель рыночной экономики в закрытом обществе на основе системы уравнений для накоплений и цены товара.

**Ключевые слова:** функции распределения ликвидных накоплений, уравнение Фоккера–Планка, модель рыночной экономики.

**PACS:** 89.65.Gh, 89.75.Da

**УДК:** 536

## MATHEMATICAL MODELING OF ECONOMIC PROCESSES BY METHODS OF NONEQUILIBRIUM STATISTICAL MECHANICS

B. W. Hnativ[a], R. M. Tokarchuk[a], P. P. Kostrobij[a], M. V. Tokarchuk[a, b]

[a] *National University "Lvivska Politechnika"*
*12 S. Bandera Str., 79013, Lviv, Ukraine*
[b] *National University "Lvivska Politechnika*
*Institute of Applied Mathematics and Fundamental Sciences,*
*12 S. Bandery Str., Lviv, UA-79013, Ukraine*

By means of the Zubarev nonequilibrium statistical operator method the generalized Fokker-Planck equation for the distribution function of liquid savings is obtained. The generalized velocity and transport kernels describing dynamic correlations between liquid savings of different class of families are determined. The basic model of market economy in closed society is considered based on the set of equations for savings and price of conventional product.

**Key words:** distribution function of liquid savings, Fokker-Planck equation, market economy model.

**PACS:** 89.65.Gh,89.75.Da

**УДК:** 536