

ЗАСТОСУВАННЯ ОБ’ЄМНОЇ ТРІАНГУЛЯЦІЇ ДО ЗАДАЧІ ОБЧИСЛЕННЯ ОБ’ЄМУ НАСИПАНОЇ ЗЕМЛІ

В. Кравець

*Закарпатський державний університет, Львівський навчально-науковий інститут
вул. Замарстинівська, 83А, 79058, Львів, Україна*

(Отримано 12 січня 2011 р.)

Задача обчислення об’єму насипаної землі зведена до обчислення суми об’ємів зрізаних трикутних призм, побудованих на трикутниках плоскої тріангуляції, яку розв’язано методом Делоне. Описані метод Делоне як узагальнення діаграм Вороного і алгоритм його програмної реалізації; запропонований приклад розв’язання тестової задачі.

Ключові слова: тріангуляція, метод Делоне, об’єм насипаної землі.

2000 MSC: 68W99

УДК: 681.3 513

Вступ

Слово “тріангуляція” латинського походження і означає трикутник (лат. Triangulum). На початку дамо декілька означень.

Опуклою оболонкою множини точок S евклідового простору будь-якої розмірності називається границя найменшої опуклої області цього простору, яка охоплює S .

За термінологією обчислювальної або інженерної геометрії, до класу якої належить наша задача, складові елементи такої границі називаються **гранями**.

Розглядатимемо лише дво- і тривимірні простори. Тоді для однозначності понять — 1 -грані називаються **ребрами**, а 0 -грані — **вершинами**.

Граф $G = (V, E)$, де V — множина вершин, E — множина ребер, називається **планарним**, якщо його можна укласти на площині без самоперетинів.

Тріангуляцією скінченної множини S називається **плоский граф**, що має найбільшу можливу кількість ребер, або, інакше, тріангуляція S утворюється шляхом з’єднання точок із S прямолінійними відрізками, які не перетинаються, так що будь-яка грань, яка лежить всередині опуклої оболонки S , є трикутником [1].

Задача тріангуляції має дуже широкий спектр застосувань: у картографії, геодезії, у багатьох прикладних задачах механіки і математики, наприклад, у методі скінчених елементів, а також при інтерполяції функції від двох змінних, коли задані значення функції в N довільним способом розміщених точках (x_i, y_i) і потрібно апроксимувати її в деякій новій точці (x, y) [2].

Один із можливих підходів в останній задачі опирається на відріzkово-лінійній інтерполяції, за якої поверхня, що визначається функцією, апроксимується “сіткою”, яка складається із плоских трикутних граней. Проекція (x, y) кожної точки сітки належить лише одній із трикутних граней, а відповідне значен-

ня функції $f(x, y)$ обчислюється в результаті визначення інтерполюючої площини, що проходить через три вершини грані [1,2]. Процес тріангуляції зводиться до вибору трійки точок, які утворюватимуть грані.

В останньому випадку має місце тріангуляція, яку ми називаємо **об’ємною**. Вона використовується в геодезії для обчислення об’єму гори насипаної землі і апроксимації її поверхні [2,3]. Саме з погляду такого застосування розглядається ця задача в нашій роботі.

Задача побудови об’ємної тріангуляції розв’язується в два етапи.

На першому — точки простору з координатами (x, y, h) проєктуються на площину XOY , на якій розв’язується задача плоскої тріангуляції — всі точки з координатами (x, y) з’єднуються в суміжні за цілими ребрами трикутники.

На другому — розв’язується безпосередньо задача об’ємної тріангуляції. На точках простору з координатами h , що відповідають кожній вершині плоского трикутника, будується зрізана призма, в основі якої лежить цей самий плоский трикутник. Сума об’ємів всіх зрізаних призм, побудованих на плоскій тріангуляції, апроксимує поверхню гори насипаної землі.

Зауважимо, що об’ємна тріангуляція за нашим означенням відрізняється від класичної просторової тріангуляції тим, що всі грані в ній, які побудовані на координаті h , утворюють вертикальні чотирикутники, на відміну від трикутних граней, що нахилені до площини XOY під деяким кутом в другому випадку.

I. Постановка задачі тріангуляції

Розглянемо задачу тріангуляції у формальній постановці.

Нехай на площині XOY задано розсіяну множи-

ну S , що містить N точок. Потрібно для кожної точки p_i , множини S визначити локус (геометричне місце) точок (x, y) на площині, для яких відстань до p_i менша, ніж до будь-якої іншої точки множини S . Ця задача зводиться, очевидно, до пошуку найближчих "сусідів" кожної точки множини S , з яких будуються трикутники [1].

Для глибокого розуміння суті цієї складної і громіздкої задачі розглянемо детальніше математичну модель і метод розв'язування задачі триангуляції. Для цього дослідимо спочатку структуру розбиття множини S на трикутники.

Якщо є дві точки p_i і p_j , то множина точок, ближчих до p_i ніж до p_j є нічим іншим, як півплощиною, яка визначається прямою, що перпендикулярна до відрізка $p_i p_j$. Ця пряма ділить відрізок $p_i p_j$ навпіл, а відповідна їй півплощина містить точку p_i . Позначимо цю півплощину — $H(p_i p_j)$, а множину точок із найближчих "сусідів" до p_i — $V(i)$. Така множина утворюється в результаті перетину $N-1$ півплощин і утворює опуклу багатокутну область, яка має не більше ніж $N-1$ сторону. Отже,

$$V(i) = \bigcap_{i \neq j} H(p_i p_j)$$

Область $V(i)$ називають *многокутником Вороного* [1]. Кожній із N початкових точок множини S відповідає лише один многокутник Вороного. Тому, якщо $(x, y) \in V(i)(p_i)$ є найближчим "сусідом" точки (x, y) .

Отримане таким способом розбиття площини на N областей, утворює деяку сітку, яку називають *діаграмою Вороного*. Вершини цих многокутників визначають вершини діаграми Вороного, а відрізки, що їх з'єднують — ребра діаграми Вороного. Прикладом сітки многокутників Вороного може слугувати сукупність мильних бульбашок.

Многокутники, які називають діаграмами Вороного, вперше глибоко вивчав російський математик українського походження Г. Вороний (1868–1908), який використав їх у роботі з квадратичними формами. Ці многокутники називають ще многокутниками Тиссена, або многокутниками близькості [1].

Діаграми Вороного мають дуже цікаві властивості. Подаємо тут основні із них без доведень.

1. Ніякі чотири точки початкової множини S не лежать на одному колі.

2. Кожна вершина діаграми Вороного є точкою перетину точно трьох ребер діаграми.

Ця властивість еквівалентна такому твердженню: вершини діаграми Вороного утворюють центри кіл, кожне з яких визначається трьома точками початкової множини. Позначимо через $C(V)$ таке коло, що відповідає вершині V . Воно, своєю чергою, має також дуже цікаву властивість.

3. Для кожної вершини V діаграми Вороного множини S коло $C(V)$ не містить ніяких інших точок множини S . Таке коло називається *порожнім* [1].

Радянський математик Б. Делоне (1890–1980) глибоко узагальнив і розвинув теорію діаграм Вороного і запропонував метод їх побудови, які називають *методом порожнього кола* або *методом Делоне* [4].

Для кращого розуміння методу Делоне розглянемо граф, двоїстий діаграмі Вороного, що укладений на площині і утворений з'єднанням відрізками кожної пари точок множини S , многокутники Вороного яких мають спільне ребро. У результаті отримаємо планарний граф з вершинами в N початкових точках.

Для двоїстого графа справедлива важлива теорема Делоне [1,4].

Теорема *Граф, двоїстий діаграмі Вороного, утворює триангуляцію множини S .*

Для доведення цієї теореми необхідно показати, що опукла оболонка множини S розбивається на трикутники, які визначаються точками множини S . Для цього виділяється множина трикутників, вершини яких є водночас вершинами многокутників Вороного. Крім того, ніяких два трикутники цієї множини не повинні перетинатися і кожна точка всередині опуклої оболонки S повинна належати тільки одному із цих трикутників. Детальніше доведення цієї теореми опускаємо через його громіздкість і складність [1, 4]. Із теореми випливає також той факт, що діаграму Вороного можна використати для розв'язування задачі триангуляції.

У роботах [1, 4] встановлюється також однозначність і оптимальність розбиття точок площини діаграмами Вороного, а, отже, і триангуляцією Делоне.

Потрібно зауважити також, що найновішим застосуванням діаграм Вороного і триангуляції, побудованої за методом Делоне, є оптимальне розміщення станцій мобільного зв'язку з метою щільного покриття якогось простору, як також, можливо, і станцій іншого призначення.

II. Метод порожнього кола для розв'язування задач триангуляції

У роботі [5] вже коротко описували загальну схему машинного алгоритму цього методу.

Тут викладемо тільки загальну суть цього алгоритму у неформальному вигляді. Позначимо через L розбиття множини S на трикутники. Його (L) знаходимо шляхом побудови суміжних за цілими ребрами трикутників, які вписані в коло і мають своїми вершинами точки множини S .

Перше коло радіуса $d_{min}/2$ (d_{min} — найменша відстань між точками) описуємо навколо першої точки, тобто з центром в ній. Якщо коло порожнє, тобто в ньому крім центра не міститься інших точок множини S , то збільшуємо радіус кола на таку саму величину і описуємо інше коло навколо цього самого центра. Якщо в коло потрапила лише одна точка

множини S , то друге коло будемо такого самого радіуса, але вже через дві точки — першу, яка була центром першого кола, і другу, яка потрапила в попереднє коло. Центр такого кола вибираємо на внутрішній стороні перпендикуляра до середини хорди, що стягує ці дві точки.

З другим колом діємо аналогічно — перевіряємо скільки точок потрапляє всередину: якщо більше ніж одна — зменшуємо радіус; якщо ні одної — збільшуємо радіус; якщо в коло потрапила лише одна точка, то описуємо коло C навколо трьох точок. Три знайдені точки, що лежать на колі C , утворюють перший трикутник P розбиття L .

Зауваження. Тут і надалі через C позначаємо всяке біжуче коло, описане навколо трьох точок множини S ; а через P — біжучий трикутник, що вписаний в коло C .

Для побудови інших трикутників суміжних із знайденим за цілими ребрами, чинимо аналогічно.

Розглянемо, наприклад, яку-небудь сторону трикутника P і пересуватимемо центр описаного навколо нього кола C по перпендикуляру до середини цієї сторони в напрямку зсередини-назовні по відношенню до трикутника P . Варто зауважити також, що центр кола C може лежати також ззовні цього трикутника.

Під час побудови чергового кола C потрібно так змінювати радіус кола, щоб воно проходило через обидві вершини однієї сторони трикутника P ($(n-1)$ -вимірної грані багатогранника L). Тоді нове коло зразу покине іншу (третю) вершину трикутника P і врешті-решт наштовхнеться на одну або декілька точок множини S , які лежать поза цим трикутником P . Нове коло C , що описане навколо знайдених трьох точок, утворює деякий новий трикутник P , суміжний з попереднім за вибраною стороною.

Продовжуючи описані дії, одержуємо шукане єдиноможливе розбиття L множини S або триангуляцію Делоне методом порожнього кола [4,5].

Для визначення “якості” отриманої триангуляції існує багато критеріїв, які включають максимізацію найменшого кута або мінімізацію повної довжини ребер. Однак ці критерії визначають більше зручність оцінки помилки інтерполяції, ніж найкращу триангуляцію.

Якщо задачу триангуляції розглядати як самостійну, тобто як ізольовану від її верхньої задачі, яка її використовує, то основним критерієм оптимального її розв'язку є найкраща триангуляція. А цього можна досягти не будь-яким способом.

Майже оптимальну конфігурацію триангуляційної сітки L множини S можна досягнути за допомогою методу порожнього кола або Делоне [4]. Крім того, цей метод дозволяє побудувати трикутники, які дуже близькі до рівносторонніх. Триангуляційну сітку L множини S , побудовану таким способом, називаємо *триангуляцією Делоне*, яка є нічим іншим як узагальненням діаграм Вороного [1].

III. Обчислення об'єму насипаної землі за допомогою об'ємної триангуляції

Тут розглянемо другий етап розв'язування нашої задачі, а саме: обчислення об'єму насипаної землі і апроксимацію її поверхні за допомогою об'ємної триангуляції, яка будується на плоскій триангуляції.

Кожній вершині трикутника, що належить плоскій триангуляції, відповідає просторова координата h . Тіло, побудоване на цих вершинах, утворює зрізану призму (рис. 1).

Тіло $ABCDEF$ утворює зрізану призму, яка є одночасно елементом об'ємної триангуляції. Додаючи об'єми всіх таких призм, побудованих на кожному трикутнику плоскої триангуляції, отримуємо приблизний об'єм гори насипаної землі, що і вимагалось знайти в найпершій постановці нашої задачі. Очевидно, що приблизне значення об'єму гори одержуємо через те, що плоска грань EFD тільки апроксимує криволінійну поверхню гори, а не точно її визначає. Для обчислення площі сплайн-поверхні гори необхідно знайти суму площ верхніх трикутних граней всіх зрізаних призм, які утворюють об'ємну триангуляцію [2].

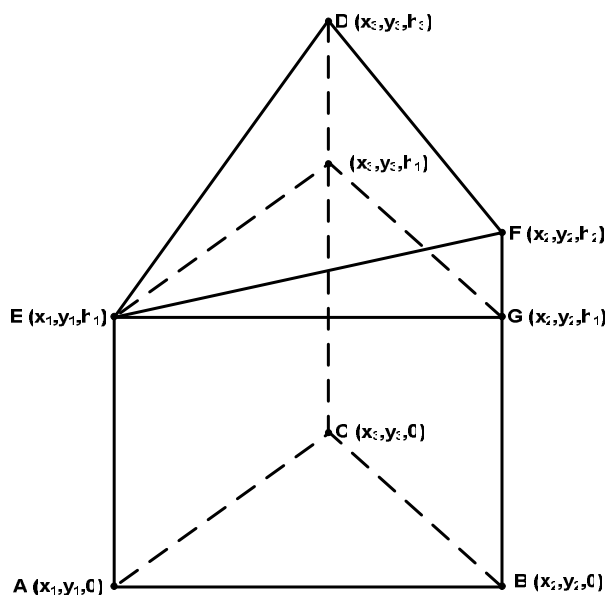


Рис. 1. Елемент об'ємної триангуляції

Для обчислення об'єму тіла $ABCDEF$ зрізуємо його площиною, паралельною до площини координат HOY , що віддалена від неї на відстані h_1 . Без обмеження загальності, припускаємо, що в нашому випадку $h_1 \leq (h_2, h_3)$. Тоді об'єм тіла $ABCDEF$ визначаємо як суму об'ємів призми $ABCIEG$ і лежачої піраміди $EGFDI$ з вершиною в точці E і основою — трапецією $GFDI$, тобто:

$$V_T = V_{\text{призми}} + V_{\text{піраміди}}$$

Після всіх перетворень і спрощень отримуємо зручну формулу для обчислень:

$$V_T = \frac{(h_1 + h_2 + h_3)}{3} \cdot S, \quad (1)$$

де S — площа трикутника ABC , а h_1, h_2, h_3 — відповідні висоти його вершин (див. рис. 1).

IV. Програмна реалізація методу порожнього кола

для побудови триангуляції Делоне

Для розв'язування задачі триангуляції описаним методом був створений комплекс програм **DELONE**, написаний мовою **C**, який має структуру пакета. Його умовно можна розділити на три великих блоки:

1. Вхідний, який підготовлює вхідні дані для тестової задачі;
2. Функціональний, який безпосередньо реалізує метод Делоне для заданої кількості точок;
3. Допоміжний, який графічно ілюструє розв'язок тестової задачі.

Блок підготовки вхідних даних може працювати в двох режимах: з випадковою функцією та зовнішніми даними. В обох випадках файли вхідних даних складаються з точок простору з координатами (x, y, h) . Основна відмінність режимів роботи цього блока полягає в тому, що випадкова функція генерує вхідні дані в діапазоні екранних координат, а реальні дані задаються в світовій системі координат, які перетворюються до екранних.

Третій блок, який ми називаємо допоміжним, призначений для графічного виведення результатів роботи пакета. Він також складається з двох частин: першої — для зображення плоскої триангуляції і другої — об'ємної [6,7]. Приклад графічного зображення плоскої триангуляції подаємо в цій роботі, однак зображення об'ємної триангуляції пов'язане з деякими труднощами. Як відомо, для об'ємних тіл застосовується перспективне зображення, яке вимагає великих затрат машинних ресурсів — часу і пам'яті [7]. Оскільки наше об'ємне тіло складається із сукупності трикутних призм, то навіть для невеликої кількості початкових точок множини S , побудова перспективного зображення пов'язана із перебором великої кількості ребер тіла з метою виявлення його видимих частин [6,7]. Крім того, зображення виходить достатньо складним і не наочним, особливо верхня його частина — сплайн-поверхня. Хоча блок побудови перспективного зображення входить у пакет, однак, враховуючи наведені міркування, ми не подаємо тут графічного зображення об'ємної триангуляції.

Основний функціональний блок пакета можна, своєю чергою, також умовно розділити на дві частини. У першій його частині реалізується безпосередньо алгоритм побудови плоскої триангуляції для точок площини XOY , тобто без врахування їх висоти або координати h . В другій — будується тіло об'ємної

триангуляції, обмежене, як вже зазначалося, знизу — плоскою триангуляцією на площині XOY ; зверху — сплайн-поверхнею, що відповідає плоскій триангуляції; збоку — зовнішніми вертикальними гранями, що відповідають ребрам зовнішнього опуклого контуру плоскої триангуляції. Після побудови такого тіла обчислюється його об'єм.

Розглянемо детальніше першу частину функціонального блока. Тут можна виділити такі основні підблоки.

1. Впорядкування точок множини S за відстанню від попередньої точки. Першою встановлюється точка, найближча до початку координат; другою — найближча до першої і т.д. Тут визначається також мінімальна відстань (d_{min}) між точками, половина якої приймається за радіус R порожнього кола C .

2. Виділення із множини S тих точок, які утворюють зовнішній опуклий контур, що охоплює всі інші точки S .

3. Безпосередня побудова триангуляції Делоне. Це основний блок програми. Він, своєю чергою, складається з декількох менших блоків, які виконують наступні дії.

3.1. Визначення напрямку променя l для побудови кола C . Ця дія зводиться до розпізнавання того, чи вибране ребро p_1p_2 , яке називаємо базовим ребром трикутника P , є зовнішнім чи внутрішнім по відношенню до опуклого контуру. Притому, для всіх зовнішніх базових ребер вибирається тільки один напрямок, а для всіх внутрішніх — два. Промінь l вибирається на перпендикулярі до середини хорди p_1p_2 кола C .

3.2. Побудова одного трикутника P . Для заданого базового ребра p_1p_2 третя вершина p_3 знаходиться шляхом побудови в напрямку l порожнього кола C заданого радіуса R . При цьому розпізнаються такі випадки: всередину кола не потрапила жодна, одна і більше ніж одна точки множини S . У першому і третьому випадках радіус R кола C відповідно змінюється на деякий крок d ; в другому — знайдена точка приймається за третю вершину p_3 трикутника P .

3.3. Організацію спискової структури для точок множини S , які утворюють базові вершини побудованих трикутників.

3.4. Керування процесом побудови триангуляції. Тут здійснюються основні дії для побудови триангуляції Делоне в дискретному варіанті, а саме:

- вибір базового ребра p_1p_2 трикутника P ;
- аналіз результату роботи блока 3.1, тобто встановлення статусу базового ребра і залежно від нього вибір напрямку l для побудови кола C ;
- вибір відповідного кроку d для корегування радіуса R ;
- реорганізація спискової структури в блоці 3.3;
- перевірка закінчення побудови розбиття L : воно буде повністю завершеним лише тоді, коли кожне внутрішнє базове ребро належатиме двом трикутникам, а кожне зовнішнє — лише

одному.

Діючи так з кожною стороною трикутника P , одержуємо шукане розбиття L множини S або триангуляцію Делоне.

Функціональний блок готує такі вихідні дані:

- файл впорядкованих вхідних даних, які перетворені до екранних координат;
- файл впорядкованих вхідних даних, які утворюють зовнішній опуклий контур;
- файл спискової структури, який містить всі побудовані трикутники (індекси трьох вершин трикутника у початковому файлі вхідних даних);
- файл ребер трикутників для графічного зображення;
- файл, що зберігає проміжні дані для побудови перспективного зображення об'ємної триангуляції.

Зауваження. Побудова перспективного зображення вимагає “багатосходових” перетворень координат: спочатку — світових до сферичних; далі — сферичних до координат вигляду і останньою “сходиною” є перетворення координат вигляду до екранних координат, в яких будується зображення [6, 7]. Однак для великої кількості точок таке зображення не наочне і дуже “дороге” у вимірах комп'ютерних ресурсів. Саме з тих міркувань, як вже зазначалося, ми його не подаємо.

V. Приклад

Розглянемо приклад побудови плоскої триангуляції Делоне для 24 точок з координатами (x, y, h) , які згенеровані випадковою функцією в діапазоні екранних координат: (0: 639; 35: 479; 0: 479). Третю координату h використовуємо тільки для обчислення об'єму тіла, утвореного об'ємною триангуляцією і тут її не записуємо.

Масив точок площини XOY записуємо в послідовності — індекс, координати (x, y) :

- 0 → (449, 162); 1 → (87, 478);
- 2 → (169, 223); 3 → (457, 208);

- 4 → (315, 306); 5 → (363, 149);
- 6 → (298, 161); 7 → (518, 324);
- 8 → (176, 362); 9 → (96, 164);
- 10 → (349, 417); 11 → (142, 376);
- 12 → (116, 300); 13 → (158, 280);
- 14 → (262, 85); 15 → (551, 35);
- 16 → (481, 335); 17 → (257, 293);
- 18 → (295, 228); 19 → (211, 216);
- 20 → (487, 80); 21 → (98, 177);
- 22 → (544, 126); 23 → (406, 347).

Впорядковуємо його за відстанню від попередньої точки (перша — від початку координат) і одержуємо таку послідовність індексів:

- 9, 21, 18, 2, 19, 13, 12, 11, 8, 17, 4, 23, 16, 7, 3, 0, 5, 6, 14, 20, 22, 15, 10, 1.

У розбитті L одержуємо 37 трикутників і 59 ребер.

Об'єм тіла, яке апроксимує гору насипаної землі, дорівнює величині

$$V = 324722666,999993$$

На рис. 2 показано плоску триангуляцію Делоне для 24 точок.

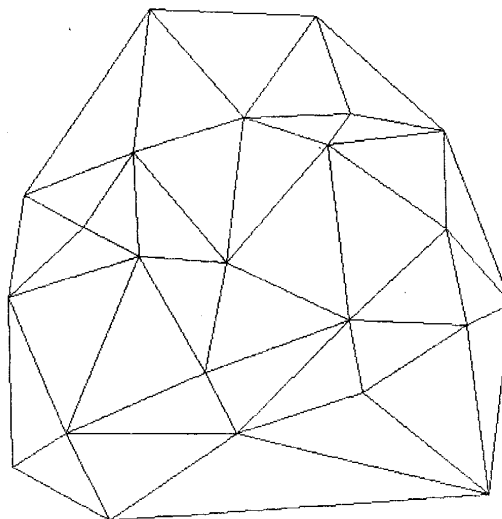


Рис. 2. Триангуляція Делоне для 24 точок площини

Література

- [1] Ф. Препарата, М. Шеймос. Вычислительная геометрия: Введение. П/р Ю.М. Баяковского. – М.: Мир, 1989. – 478 с.
- [2] Ю.С. Залогин, В.А. Деус, В.А. Скороспелов. Сплайны в инженерной геометрии. – М.: Машиностроение, 1985. – 222 с.
- [3] Дж. Девис. Статистика и анализ геологических данных. П/р Д.А. Радионова. – М.: Мир, 1977. – 572 с.
- [4] Делоне Б.Н. Геометрия положительных квадратичных форм. // Успехи математических наук, 1937, Вып. 3. – С. 40–43.
- [5] Кравець В.Л. Метод порожнього кола для задачі триангуляції. // Вісник Держ. ун-ту “Львівська політехніка” 1995, № 286. – С. 86–88.
- [6] Д. Роджерс. Алгоритмические основы машинной графики. – М.: Мир, 1989. – 504 с.
- [7] Л. Аммерал. Серия “Машинная графика на языке С”, перевод с англ.
 1. Принципы программирования в машинной графике. – 224 с.;
 2. Интерактивная трехмерная машинная графика. – 316 с.; М.: “Сол. Систем”, 1992.

ПРИМЕНЕНИЕ ОБЪЕМНОЙ ТРИАНГУЛЯЦИИ К ЗАДАЧЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОБЪЕМА НАСЫПАННОЙ ЗЕМЛИ

В. Кравец

*Закарпатский государственный университет, Львовский учебно-научный институт
ул. Замарстынивска, 83А, Львов, 79001, Украина*

Задача вычисления объема насыпанной земли приведена к вычислению суммы объемов срезанных треугольных призм, построенных на треугольниках плоской триангуляции, которая решена методом Делоне. Описаны метод Делоне как обобщение диаграмм Вороного и алгоритм его программной реализации; предложен пример решения тестовой задачи.

Ключевые слова: триангуляция, метод Делоне, объем насыпанной земли.

2000 MSC: 68W99

УДК: 681.3 513

APPLICATION OF SOLID TRIANGULATION TO PROBLEM OF COMPUTATION OF FILLED EARTH SPACE

V. Kravets

*Transcarpatian State University Lviv Educational and Scientific Institute
83A, Zamarstynivska Str., Lviv, 79058, Ukraine*

A problem of computation of the amount of bulk land is reduced to computation of the sum of volumes of truncated triangular prisms, constructed on triangles of the plane triangulation, solved by the Delone method. The Delone method as a generalization of the Voronoi diagrams and an algorithm of its program realization are described; an example of the test problem is presented.

Key words: triangulation, Delone method, amount of bulk land.

2000 MSC: 68W99

УДК: 681.3 513