ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
**"Фізико-математичні науки"**
Вип.696 № 696, (2011) с. 56–63

JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY
"LVIVSKA POLITECHNIKA"
**"Physical & mathematical sciences"**
Vol.696 No 696, (2011) 56–63

# ІНТЕРПОЛЯЦІЙНІ ОПЕРАТОРНІ ПОЛІНОМИ НА ГІЛЬБЕРТОВОМУ ПРОСТОРІ

І. Демків

*Національний університет "Львівська політехніка"*
*вул. С. Бандери 12, 79013, Львів, Україна*

*(Отримано 2 листопада 2010 р.)*

Встановлено необхідні та достатні умови інтерполяційності операторного поліному типу Ньютона, який не вимагає виконання правила підстановки. Знайдено залишковий член побудованого полінома.

**Ключові слова:** інтерполяційний поліном, континуальні вузли, залишковий член.

**2000 MSC:** 65D05,65D15

**УДК:** 519.65

## I. Вступ

Дослідженню інтерполяційних операторних поліномів в абстрактних просторах присвячено роботи [1–8]. Побудовані там інтерполяційні формули містять інтеграли Стільтьєса по оператору скалярного аргументу або інтеграли, під знак яких входили похідні, диференціали Гато інтерполяційного оператора. Бібліографію відповідних робіт у зазначеному напрямі можна знайти також у монографії [9].

У роботах [1, 3, 5–8] для побудови операторних інтерполянтів використовується континуальна інформація (інформація, що залежить від дійсного параметра), за якою будуються відповідні інтеграли в інтерполяційних формулах, але відсутня континуальність інтерполяційних вузлів. У [10–12] показано, що в нескінченновимірних просторах за рахунок вибору континуальних вузлів можна досягти єдиності та інваріантності інтерполянта. Досліджені в [12] інтерполяційні поліноми для операторів, що діють із сепарабельного гільбертового простору $H$ у банахів простір $Y$, мають вигляд

$$P_n^I(x) = F(x_0) - \sum_{i_1=1}^{\infty} \frac{(x-x_0, e_{i_1})}{(x_1-x_0, e_{i_1})} \Delta_{i_1} F\left(x_{(i_1)}\right) + \ldots + \tag{1.1}$$

$$+(-1)^n \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=i_1+1}^{\infty} \cdots \sum_{i_n=i_{n-1}+1}^{\infty} \frac{(x-x_0, e_{i_1})}{(x_1-x_0, e_{i_1})} \cdot \frac{(x-x_1, e_{i_2})}{(x_2-x_1, e_{i_2})} \cdots \frac{(x-x_{n-1}, e_{i_n})}{(x_n-x_{n-1}, e_{i_n})} \cdot$$

$$\cdot \Delta_{i_1,i_2,\ldots,i_n} F\left(x_{(i_1,i_2,\ldots,i_n)}\right) + R_n(x),$$

де

$$R_n(x) = (-1)^{n+1} \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=i_1+1}^{\infty} \cdots \sum_{i_{n+1}=i_n+1}^{\infty} \frac{(x-x_0, e_{i_1})}{(x_1-x_0, e_{i_1})} \cdots \frac{(x-x_{n-1}, e_{i_n})}{(x_n-x_{n-1}, e_{i_n})} \cdot$$

$$\cdot \frac{(x-x_n, e_{i_{n+1}})}{(x_{n+1}-x_n, e_{i_{n+1}})} \cdot \Delta_{i_1,i_2,\ldots,i_{n+1}} F\left(x_{(i_1,i_2,\ldots,i_{n+1})}\right), \quad x_{n+1} = x,$$

$\{e_i\}_{i=\overline{1,\infty}}$, $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, \ldots$ – ортонормований базис, $(\cdot,\cdot)$ – скалярний добуток в $H$, $\delta_{ij}$ – символ Кронекера, $x_i, i = \overline{0,n}$ – довільні фіксовані елементи з $H$, причому $x_i \neq x_j$, $i \neq j$. Використано позначення

$$\Delta_{i_1,i_2,\ldots,i_k} F\left(x_{(i_1,i_2,\ldots,i_k)}\right) = -\nabla_{i_1,i_2,\ldots,i_k} F\left(x_{(i_1,i_2,\ldots,i_k)}\right) =$$

$$= \Delta_{i_1,i_2,\ldots,i_{k-1}} F\left(x_{(i_1,i_2,\ldots,i_{k-1},i_k+1)}\right) -$$

$$-\Delta_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}} F\left(x_{(i_1,i_2,\ldots,i_{k-1},i_k)}\right),$$

$$k = 1, 2, \ldots, n+1,$$

$$\Delta_{i_1} F\left(x_{(i_1)}\right) = F\left(x_{(i_1+1)}\right) - F\left(x_{(i_1)}\right),$$

$$\mathbf{i}^n = (i_1, i_2, \ldots, i_n),$$

(рекурентне визначення мішаних різниць вперед будь - якого порядку). Введено зліченну множину точок

$$x_{(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)} = x_0 + \sum_{s=1}^{n} \sum_{p=\xi_s}^{\infty} (x_s - x_{s-1}, e_p)\, e_p, \quad (1.2)$$

$$1 \le \xi_1 \le \xi_2 \le \ldots \le \xi_n \le \infty,$$

яку використовують як інтерполяційні вузли.

При цьому має місце представлення $F(x) = P_n^I(x) + R_n(x)$ .

Доведена наступна теорема

**Теорема.** *Нехай неперервний оператор $F(x)$ задовольняє умови*

$$\sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=i_1+1}^{\infty} \ldots \sum_{i_k=i_{k-1}+1}^{\infty} \frac{\left\|\Delta_{i_1 i_2\ldots i_k} F\left(x_{(i_1,i_2,\ldots,i_k)}\right)\right\|_Y^2}{(x_1 - x_0, e_{i_1})^2 \ldots (x_k - x_{k-1}, e_{i_k})^2} < \infty, \quad k = \overline{1, n+1}$$

*де $i_0 = 0$ , $x_i \in H$ , $i = \overline{0, n+1}$ , – набір довільних елементів; норма, породжена скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$ позначена через $\|\cdot\|$ , а норма в банаховому просторі $Y$ позначена через $\|\cdot\|_Y$ . Тоді для того, щоб для оператора $F(x)$ мало місце представлення (1.1) необхідно і достатньо, щоб мав місце дискретний аналог правила підстановки*

$$\Delta_{i_1 i_2\ldots i_k} F\left(x_{(i_1,i_2,\ldots,i_k,i_k)}\right) = \frac{\left(x_{k+1}-x_{k-1},e_{i_k}\right)}{\left(x_k-x_{k-1},e_{i_k}\right)}\times$$

$$\times \left[\Delta_{i_1 i_2\ldots i_k} F\left(x_{(i_1,i_2,\ldots,i_k,i_{k+1})}\right)\right]_{i_{k+1}=i_k+1}, k=\overline{1,n}. \quad (1.3)$$

Однак правило підстановки (1.3) є доволі обмежувальним для оператора $F(x)$ . Його можна позбутися, якщо розширити клас поліномів (1.1).

Поставимо таку інтерполяційну **задачу**: *для оператора $F(x)$ , заданого своїми значеннями на множині вузлів (1.2), знайти такий операторний поліном $P_n^I(x)$ , який задовольняє інтерполяційні умови*

$$P_n^I\left(x_{(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)}\right) = F\left(x_{(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)}\right),$$

*і не вимагає виконання правила підстановки.*

## II. Розв'язання задачі

Розв'язок поставленої задачі шукатимемо серед поліномів вигляду

$$P_n(x) = F(x_0) + \sum_{s=1}^{n} \sum_{k=1}^{s} \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=i_1+1}^{\infty} \ldots \sum_{i_k=i_{k-1}+1}^{\infty} a_{i_1\ldots i_k}\cdot \quad (2.4)$$

$$\cdot \prod_{j=1}^{k} (x - x_{j-1}, e_{i_j}) \prod_{j=k+1}^{s} (x - x_{j-1} e_{i_k}).$$

Для того, щоб операторний поліном (2.4) був інтерполяційним на континуальній множині вузлів (1.2) шукаємо його у вигляді

$$P_n^{mN}(x) = p_0^{mN} + \sum_{s=1}^{n} p_s^{mN}(x),$$

$p_0^{mN} = F(x_0)$ , (2.5)

$$p_n^{mN}(x) = p_{n,0}(x) + p_{n,1}(x) + p_{n,2}(x).$$

Формули (2.5) будуємо так, щоб під час виконання правила підстановки

$$p_n^{mN}(x) = p_{n,0}(x),$$

тобто $p_{n,1}(x)+$ $p_{n,2}(x)$ містять поправки, які виражаються через правило підстановки

$$\left[p_{n,0}(x) + p_{n,1}(x)\right]_{x_n = x} = -p_0^{mN} - \sum_{k=1}^{n-1} p_{k,0}(x) + F(x), \quad (2.6)$$

$$\left.p_{n,2}(x)\right|_{x_n=x} = -\sum_{k=2}^{n-1} \left[p_{k,1}(x) + p_{k,2}(x)\right], \quad (2.7)$$

$$n = 3, 4, \ldots, p_{2,2}(x) \equiv 0.$$

Якщо побудовано такий функціональний поліном (2.5), що має властивості (2.6), (2.7), то тоді матиме місце тотожність

$$\left.P_n^{mN}(x)\right|_{x_n=x} = \sum_{s=0}^{n} p_s^{mN}(x) = F(x)$$

або

$$F(x) - P_{n-1}^{mN}(x) = R_{n-1}^{mN}(x) = \left.p_n^{mN}(x)\right|_{x_n=x}. \quad (2.8)$$

Побудова полінома $p_{n,0}(x)+$ $p_{n,1}(x)$ не викликає жодних ускладнень. Дійсно маємо

$$
\begin{aligned}
p_{n,0}(x)+p_{n,1}(x) &= (-1)^n \sum_{i_1=1}^{\infty}\sum_{i_2=i_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{i_n=i_{n-1}+1}^{\infty}\Delta_{\mathbf{i}^n}F\left(x_{\mathbf{i}^n}\right)\prod_{l=1}^{n}\frac{(x-x_{l-1},e_{i_l})}{(x_l-x_{l-1},e_{i_l})}+\\
&+(-1)^{n-1}\sum_{i_1=1}^{\infty}\sum_{i_2=i_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{i_{n-1}=i_{n-2}+1}^{\infty}\left[\Delta_{\mathbf{i}^{n-1}}F\left(x_{(\mathbf{i}^{n-1},i_{n-1})}\right)\frac{(x_{n-1}-x_{n-2},e_{i_{n-1}})}{(x_n-x_{n-2},e_{i_{n-1}})}-\right.\\
&\left.-\Delta_{\mathbf{i}^{n-1}}\;F\left(x_{\mathbf{i}^n}\right)\big|_{i_n=i_{n-1}}\right]\prod_{l=1}^{n-1}\frac{(x-x_{l-1},e_{i_l})}{(x_l-x_{l-1},e_{i_l})}\cdot\frac{(x-x_{n-1},e_{i_{n-1}})}{(x_n-x_{n-1},e_{i_{n-1}})}+\\
&+(-1)^{n-2}\sum_{i_1=1}^{\infty}\sum_{i_2=i_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{i_{n-2}=i_{n-3}+1}^{\infty}\left[\frac{(x_{n-2}-x_{n-3},e_{i_{n-2}})}{(x_n-x_{n-3},e_{i_{n-2}})}\;\Delta_{\mathbf{i}^{n-2}}F\left(x_{(\mathbf{i}^{n-2},i_{n-2},i_{n-2})}\right)-\right.\\
&\left.-\Delta_{\mathbf{i}^{n-2}}\;F\left(x_{(\mathbf{i}^{n-2},i_{n-3},i_{n-3})}\right)\big|_{i_{n-3}=i_{n-2}}\right]\prod_{l=1}^{n-2}\frac{(x-x_{l-1},e_{i_l})}{(x_l-x_{l-1},e_{i_l})}\cdot\\
&\cdot\prod_{l=n-1}^{n}\frac{(x-x_{l-1},e_{l_{n-2}})}{(x_l-x_{l-1},e_{l_{n-2}})}+\ldots-\\
&-\sum_{i_1=1}^{\infty}\left[\frac{(x_1-x_0,e_{i_1})}{(x_n-x_0,e_{i_1})}\Delta_{i_1}F\left(x_{\underbrace{(i_1,\ldots,i_1)}_{n}}\right)-\Delta_{i_1}F\left(x_{\left(i_1,\underbrace{i_2,\ldots,i_2}_{n-1}\right)}\right)\Bigg|_{i_2=i_1+1}\right]\times\\
&\times\frac{(x-x_0,e_{i_1})}{(x_1-x_0,e_{i_1})}\prod_{l=2}^{n}\frac{(x-x_{l-1},e_{i_l})}{(x_n-x_{l-1},e_{i_l})}
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

.

Потім шукаємо такий оператор $S_n$ , який з кожного полінома $p_{k,1}(x)+$ $p_{k,2}(x)$ утворює поліном $n$-го степеня $S_n\left(p_{k,1}(x)+p_{k,2}(x)\right)$ з властивістю

$$
S_n\left(p_{k,1}(x)+p_{k,2}(x)\right)\big|_{x_n=x}=p_{k,1}(x)+p_{k,2}(x),\quad k=\overline{2,n-1}. \tag{1.10}
$$

Щоб довести, що таких операторів існує нескінченна кількість, достатньо вказати хоча б два оператори $S_n^1$ та $S_n^2$ з властивістю (1.10). Тоді будь-який оператор вигляду $\alpha S_n^1+\beta S_n^2$ при всіх значеннях параметрів $\alpha,\beta$ , які задовольняють умову $\alpha+\beta=1$ , матиме властивість (1.10).

Для побудови оператора $S_n$ візьмемо, наприклад, поліном $k$-го степеня $p_{k,1}(x)+$ $p_{k,2}(x)$ , $k=\overline{2,n-1}$ . Він міститиме суму $l$-нескінченних сум $l=\overline{1,k}$, під якими будуть міститись поліноми $l$-го степеня по $x$ . Фіксуємо довільне $p_l\in\overline{1,l}$ і вставляємо у кожну із нескінченних сум множник $\prod\limits_{j=l+1}^{n}\frac{\left(x-x_{j-1},e_{i_{p_j}}\right)}{\left(x_n-x_{j-1},e_{i_{p_j}}\right)}$ (дія оператора $S_n$ ), тоді кожний поліном $m$-го степеня перетвориться у поліном $n$-го степеня, причому очевидно виконуватимуться співвідношення (1.10).

Недоліком вищенаведеного підходу є те, що побудований таким способом з інтерполяційного полінома $P_{n-1}^{mN}(x)$ поліном $P_n^{mN}(x)$ матиме інтерполяційні властивості полінома $P_{n-1}^{mN}(x)$ і інтерполювати функціонал $F(x)$ тільки у вузлі $x_n$ без континуального інтерполяційного зв'язку з попередніми вузлами.

Розглянемо інший підхід до побудови оператора $S_n$ .

Візьмемо довільний доданок з полінома $k$-го степеня $p_{k,1}(x)+$ $p_{k,2}(x)$, $k=\overline{2,n-1}$ . Нехай це буде $l$-кратна нескінченна сума вигляду

$$
r_l^k\left(x\left(\cdot\right)\right)=\sum_{i_1=1}^{\infty}\sum_{i_2=i_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{i_{l-1}=i_{l-2}+1}^{\infty}M_l^k\left(\mathbf{i}^l\right)\,m_l\left(x;\mathbf{i}^l\right),\quad l=\overline{1,k}, \tag{1.11}
$$

де ядро $M_l^k\left(\mathbf{i}^l\right)$ не містить $x$ і складається з двох доданків, у кожний з яких входить $l$-та різниця $\Delta_{i_1,i_2,\ldots,i_l}$ оператора $F$, обчислена у "точці"$x_{(t_1,\ldots,t_k)}$ , (кожне з $t_1,\ldots,t_k$ виражаються через індекс фіксованого елемента безпосередньо або через підстановку), а $m_l\left(x;\mathbf{i}^l\right)$ є поліномом $l$-го степеня від $x$ . Тоді

$$
S_n r_l^k\left(x\right)=\sum_{i_1=1}^{\infty}\sum_{i_2=i_1+1}^{\infty}\cdots\sum_{i_l=i_{l-1}+1}^{\infty}\Delta_{i_{l+1}}M_l^k\left(\mathbf{i}^l;\left(\underbrace{i_{l+1},\ldots,i_{l+1}}_{(n-l)}\right)\right)\times \tag{1.12}
$$

$$\times m_l\left(x;\mathbf{i}^l\right)\left(\prod_{j=l+1}^{n}\frac{(x-x_{j-1},e_{i_{l+1}})}{(x_n-x_{j-1},e_{i_{l+1}})}\right)+$$
$$+\sum_{i_1=1}^{\infty}\sum_{i_2=i_1+1}^{\infty}\dots\sum_{i_l=i_{l-1}+1}^{\infty}\Delta_{i_{l+1}}M_l^k\left(\mathbf{i}^l;\left(\underbrace{i_{l+1},\dots,i_{l+1}}_{(n-i)}\right)\right)\Bigg|_{i_{l+1}=i_l+1}m_l\left(x;\mathbf{i}^l\right)^i=$$
$$=-\sum_{i_1=1}^{\infty}\sum_{i_2=i_1+1}^{\infty}\dots\sum_{i_{l-1}=i_{l-2}+1}^{\infty}M_l^k\left(\mathbf{i}^l\right)m_l\left(x;\mathbf{i}^l\right).$$

Наведемо декілька прикладів вигляду поліномів $p_n^{mN}(x)$ . Маємо

$$p_1^{mN}(x)=p_0^{mN}+p_{1,0}(x)=F\left(x_0\right)+\sum_{i_1=1}^{\infty}\nabla_{i_1}F\left(x_{(i_1)}\right)\frac{(x-x_0,e_{i_1})}{(x_1-x_0,e_{i_1})}.$$

$$p_2^{mN}(x)=p_{2,0}(x)+p_{2,1}(x)=\sum_{i_1=1}^{\infty}\sum_{i_2=i_1+1}^{\infty}\left[\Delta_{i_1,i_2}F\left(x_{(i_1,i_2)}\right)\right]\frac{(x-x_0,e_{i_1})(x-x_1,e_{i_2})}{(x_1-x_0,e_{i_1})(x_2-x_1,e_{i_2})}+$$
$$+\sum_{i_1=1}^{\infty}\left\{\Delta_{i_1}\ F\left(x_{(i_1,i_2)}\right)\Big|_{i_2=i_1+1}-\frac{(x_1-x_0,e_{i_1})}{(x_2-x_0,e_{i_1})}\Delta_{i_1}F\left(x_{(i_1,i_1)}\right)\right\}\cdot\prod_{l=1}^{2}\frac{(x-x_{l-1},e_{i_l})}{(x_l-x_{l-1},e_{i_l})}.$$

$$p_3^{mN}(x)=p_{3,0}(x)+p_{3,1}(x)+p_{3,2}(x)=\sum_{i_1=1}^{\infty}\sum_{i_2=i_1+1}^{\infty}\sum_{i_3=i_2+1}^{\infty}\nabla_{\mathbf{i}^3}F\left(x_{\mathbf{i}^3}\right)\prod_{l=1}^{3}\frac{(x-x_{l-1},e_{i_l})}{(x_l-x_{l-1},e_{i_l})}+$$
$$+\sum_{i_1=1}^{\infty}\sum_{i_2=i_1+1}^{\infty}\left[\frac{(x_2-x_1,e_{i_2})}{(x_3-x_1,e_{i_2})}\nabla_{i_1,i_2}F\left(x_{(i_1,i_2,i_2)}\right)-\nabla_{i_1,i_2}F\ \left(x_{\mathbf{i}^3}\right)\Big|_{i_3=i_2+1}\right]\times\prod_{l=1}^{2}\frac{(x-x_{l-1},e_{i_l})}{(x_i-x_{i-1},e_{i_l})}\frac{(x-x_2,e_{i_2})}{(x_3-x_2,e_{i_2})}+$$
$$+\sum_{i_1=1}^{\infty}\left[\frac{(x_1-x_0,e_{i_1})}{(x_3-x_0,e_{i_2})}\nabla_{i_1}F\left(x_{(i_1,i_1,i_1)}\right)-\nabla_{i_1}F\ \left(x_{(i_1,t,t)}\right)\Big|_{t=i_1+1}\right]\times\frac{(x-x_0,e_{i_1}))}{(x_1-x_0,e_{i_1}))}\prod_{l=1}^{2}\frac{(x-x_l,e_{i_1})}{(x_3-x_l,e_{i_1})}+$$
$$+\sum_{i_1=1}^{\infty}\sum_{i_2=i_1+1}^{\infty}\left[\frac{(x_1-x_0,e_{i_1})}{(x_2-x_0,e_{i_1})}\nabla_{\mathbf{i}^2}F\left(x_{(i_1,i_1,i_2)}\right)-\nabla_{\mathbf{i}^2}F\ \left(x_{(i_1,t,i_2)}\right)\Big|_{t=i_1+1}\right]\times\prod_{l=1}^{2}\frac{(x-x_{l-1},e_{i_l})}{(x_l-x_{l-1},e_{i_l})}\frac{(x-x_2,e_{i_2})}{(x_3-x_2,e_{i_2})}+$$
$$+\sum_{i_1=1}^{\infty}\left[\nabla_{i_1}F\ \left(x_{(i_1,t,t)}\right)\Big|_{t=i_1+1}-\frac{(x_1-x_0,e_{i_1})}{(x_2-x_0,e_{i_1})}\nabla_{i_1}F\ \left(x_{(i_1,i_1,t)}\right)\Big|_{t=i_1+1}\right]\cdot\prod_{l=1}^{3}\frac{(x-x_{l-1},e_{i_1})}{(x_l-x_{l-1},e_{i_1})}.$$

Окремо запишемо поліном четвертого степеня у вигляді

$$p_4^{mN}(x)=p_{4,0}(x)+p_{4,1}(x)+p_{4,2}(x)=\sum_{i_1=1}^{\infty}\sum_{i_2=i_1+1}^{\infty}\sum_{i_3=i_2+1}^{\infty}\sum_{i_4=i_3+1}^{\infty}a_{4,0}\prod_{l=1}^{4}(x-x_{l-1},e_{i_l})+\tag{1.13}$$
$$+\sum_{i_1=1}^{\infty}\sum_{i_2=i_1+1}^{\infty}\sum_{i_3=i_2+1}^{\infty}a_{4,1}\prod_{l=1}^{3}(x-x_{l-1},e_{i_l})(x-x_3,e_{i_3})+\sum_{i_1=1}^{\infty}\sum_{i_2=i_1+1}^{\infty}a_{4,2}\prod_{l=1}^{2}(x-x_{l-1},e_{i_l})\prod_{l=3}^{4}(x-x_{l-1},e_{i_2})+$$
$$+\sum_{i_1=1}^{\infty}a_{4,3}(x-x_0,e_{i_1})\prod_{l=2}^{4}(x-x_{l-1},e_{i_1})+\sum_{i_1=1}^{\infty}\sum_{i_2=i_1+1}^{\infty}\sum_{i_3=i_2+1}^{\infty}a_{4,4}\prod_{l=1}^{2}(x-x_{l-1},e_{i_l})\prod_{l=3}^{4}\left(x-x_{l-1},e_{i_{l-1}}\right)+$$
$$+\sum_{i_1=1}^{\infty}\sum_{i_2=i_1+1}^{\infty}a_{4,5}\prod_{l=1}^{2}(x-x_{l-1},e_{i_1})\prod_{l=3}^{4}(x-x_{l-1},e_{i_2})+\sum_{i_1=1}^{\infty}\sum_{i_2=i_1+1}^{\infty}a_{4,6}\prod_{l=1}^{3}(x-x_{l-1},e_{i_1})(x-x_3,e_{i_2})+$$
$$+\sum_{i_1=1}^{\infty}a_{4,7}\prod_{l=1}^{4}(x-x_{l-1},e_{i_1})+\sum_{i_1=1}^{\infty}\sum_{i_2=i_1+1}^{\infty}a_{4,8}\prod_{l=1}^{2}(x-x_{l-1},e_{i_1})\prod_{l=3}^{4}(x-x_{l-1},e_{i_2})+$$
$$+\sum_{i_1=1}^{\infty}a_{4,9}\prod_{l=1}^{2}(x-x_{l-1},e_{i_1})\prod_{l=3}^{4}(x-x_{l-1},e_{i_1})+\sum_{i_1=1}^{\infty}\sum_{i_2=i_1+1}^{\infty}\sum_{i_3=i_2+1}^{\infty}a_{4,10}\prod_{l=1}^{2}(x-x_{l-1},e_{i_l})\prod_{l=3}^{4}\left(x-x_{l-1},e_{i_{l-1}}\right)+$$
$$+\sum_{i_1=1}^{\infty}\sum_{i_2=i_1+1}^{\infty}a_{4,11}\prod_{l=1}^{2}(x-x_{l-1},e_{i_l})\prod_{l=3}^{4}(x-x_{l-1},e_{i_2})+\sum_{i_1=1}^{\infty}\sum_{i_2=i_1+1}^{\infty}a_{4,12}(x-x_0,e_{i_1})\prod_{l=2}^{3}(x-x_{l-1},e_{i_1})(x-x_3,e_{i_2})+$$
$$+\sum_{i_1=1}^{\infty}a_{4,13}(x-x_0,e_{i_1})\prod_{l=2}^{3}(x-x_{l-1},e_{i_l})(x-x_3,e_{i_1}),$$

де

$$a_{4,0} = \Delta_{\mathbf{i}^4} F\left(x_{(\mathbf{i}^4)}\right) \prod_{l=1}^{4} \left(x_l - x_{l-1}, e_{i_l}\right)^{-1}, \tag{1.14}$$

$$a_{4,1} = \left[\Delta_{\mathbf{i}^3} F\left(x_{(\mathbf{i}^4)}\right)\Big|_{i_4=i_3+1} - \frac{(x_3 - x_2, e_{i_3})}{(x_4 - x_2, e_{i_3}))} \Delta_{\mathbf{i}^3} F\left(x_{(i_1,i_2,i_3,i_3)}\right)\right] \cdot \prod_{l=1}^{3} \left(x_l - x_{l-1}, e_{i_l}\right)^{-1} \left(x_4 - x_3, e_{i_3}\right)^{-1},$$

$$a_{4,2} = \left[\frac{(x_2 - x_1, e_{i_2})}{(x_4 - x_1, e_{i_2})} \cdot \Delta_{\mathbf{i}^2} F\left(x_{(i_1,i_2,i_2,i_2)}\right) - \Delta_{\mathbf{i}^2} F\left(x_{(i_1,i_2,i_3,i_3)}\right)\Big|_{i_3=i_2+1}\right] \cdot$$
$$\cdot \prod_{l=1}^{2} \left(x_l - x_{l-1}, e_{i_l}\right)^{-1} \prod_{l=3}^{4} \left(x_4 - x_{l-1}, e_{i_2}\right)^{-1},$$

$$a_{4,3} = \left[\Delta_{i_1} F\left(x_{(i_1,i_2,i_2,i_2)}\right)\Big|_{i_2=i_1+1} - \frac{(x_1 - x_0, e_{i_1})}{(x_4 - x_0, e_{i_1})} \cdot \Delta_{i_1} F\left(x_{(i_1,i_1,i_1,i_1)}\right)\right] \cdot \left(x_1 - x_0, e_{i_1}\right)^{-1} \prod_{l=2}^{4} \left(x_4 - x_{l-1}, e_{i_1}\right)^{-1},$$

$$a_{4,4} = \left[\Delta_{\mathbf{i}^3} F\left(x_{(i_1,t,i_2,i_3)}\right)\Big|_{t=i_1+1} - \frac{(x_1 - x_0, e_{i_1})}{(x_2 - x_0, e_{i_1})} \cdot \Delta_{\mathbf{i}^3} F\left(x_{(i_1,i_1,i_2,i_3)}\right)\right] \cdot \prod_{l=1}^{2} \left(x_l - x_{l-1}, e_{i_l}\right) \prod_{l=3}^{4} \left(x_l - x_{l-1}, e_{i_{l-1}}\right),$$

$$a_{4,5} = \left[\Delta_{\mathbf{i}^2} F\left(x_{(i_1,t,i_2,i_3)}\right)\Big|_{t=i_1+1}\Big|_{i_3=i_2+1} - \frac{(x_1 - x_0, e_{i_1})}{(x_2 - x_0, e_{i_1}))} \cdot\right.$$
$$\left. \cdot \Delta_{\mathbf{i}^2} F\left(x_{(i_1,i_1,i_2,i_3)}\right)\Big|_{i_3=i_2+1}\right] \cdot \prod_{l=1}^{2} \left(x_l - x_{l-1}, e_{i_1}\right)^{-1} \prod_{l=3}^{4} \left(x_l - x_{l-1}, e_{i_2}\right)^{-1},$$

$$a_{4,6} = \left[\Delta_{\mathbf{i}^2} F\left(x_{(i_1,t,t,i_2)}\right)\Big|_{t=i_1+1} - \frac{(x_1 - x_0, e_{i_1})}{(x_2 - x_0, e_{i_1})} \cdot \Delta_{\mathbf{i}^2} F\left(x_{(i_1,i_1,t,i_2)}\right)\Big|_{t=i_1+1}\right] \cdot$$
$$\cdot \prod_{l=1}^{3} \left(x_l - x_{l-1}, e_{i_1}\right)^{-1} \left(x_4 - x_3, e_{i_2}\right)^{-1},$$

$$a_{4,7} = \left[\Delta_{i_1} F\left(x_{(i_1,t,t,t)}\right)\Big|_{t=i_1+1} - \frac{(x_1 - x_0, e_{i_1})}{(x_2 - x_0, e_{i_1})} \cdot \Delta_{i_1} F\left(x_{(i_1,i_1,t,t)}\right)\Big|_{t=i_1+1}\right] \cdot \prod_{l=1}^{4} \left(x_l - x_{l-1}, e_{i_1}\right)^{-1},$$

$$a_{4,8} = \left[\frac{(x_1 - x_0, e_{i_1})}{(x_2 - x_0, e_{i_1})} \cdot \Delta_{\mathbf{i}^2} F\left(x_{(i_1,i_1,i_2,i_2)}\right) - \Delta_{\mathbf{i}^2} F\left(x_{(i_1,t,i_2,i_2)}\right)\Big|_{t=i_1+1}\right] \cdot$$
$$\cdot \prod_{l=1}^{2} \left(x_l - x_{l-1}, e_{i_1}\right)^{-1} \prod_{l=3}^{4} \left(x_4 - x_{l-1}, e_{i_2}\right)^{-1},$$

$$a_{4,9} = \left[\frac{(x_1 - x_0, e_{i_1})}{(x_2 - x_0, e_{i_1})} \cdot \Delta_{\mathbf{i}^2} F\left(x_{(i_1,i_1,t,t)}\right)\Big|_{t=i_1+1} - \Delta_{\mathbf{i}^2} F\left(x_{(i_1,t,t,t)}\right)\Big|_{t=i_1+1}\right] \cdot$$
$$\cdot \prod_{l=1}^{2} \left(x_l - x_{l-1}, e_{i_1}\right)^{-1} \prod_{l=3}^{4} \left(x_4 - x_{l-1}, e_{i_1}\right)^{-1},$$

$$a_{4,10} = \left[\Delta_{\mathbf{i}^3} F\left(x_{(i_1,i_2,t,i_3)}\right)\Big|_{t=i_2+1} - \frac{(x_2 - x_1, e_{i_2})}{(x_3 - x_1, e_{i_2})} \cdot \Delta_{\mathbf{i}^3} F\left(x_{(i_1,i_2,i_2,i_3)}\right)\right] \cdot$$
$$\cdot \prod_{l=1}^{2} \left(x_l - x_{l-1}, e_{i_l}\right)^{-1} \prod_{l=3}^{4} \left(x_l - x_{l-1}, e_{i_{l-1}}\right)^{-1},$$

$$a_{4,11} = \left[\Delta_{\mathbf{i}^2} F\left(x_{(i_1,i_2,t,t)}\right)\Big|_{t=i_2+1} - \frac{(x_2 - x_1, e_{i_2})}{(x_3 - x_1, e_{i_2})} \cdot \Delta_{\mathbf{i}^2} F\left(x_{(i_1,i_2,i_2,t)}\right)\Big|_{t=i_2+1}\right] \cdot$$
$$\cdot \prod_{l=1}^{2} \left(x_l - x_{l-1}, e_{i_l}\right)^{-1} \prod_{l=3}^{4} \left(x_l - x_{l-1}, e_{i_2}\right)^{-1},$$

$$a_{4,12} = \left[\frac{(x_1 - x_0, e_{i_1})}{(x_3 - x_0, e_{i_1})} \cdot \Delta_{\mathbf{i}^2} F\left(x_{(i_1,i_1,i_1,i_2)}\right) - \Delta_{\mathbf{i}^2} F\left(x_{(i_1,t,t,i_2)}\right)\Big|_{t=i_1+1}\right] \cdot$$
$$\cdot \left(x_1 - x_0, e_{i_1}\right)^{-1} \prod_{l=2}^{3} \left(x_3 - x_{l-1}, e_{i_1}\right)^{-1} \left(x_4 - x_3, e_{i_2}\right)^{-1},$$

$$a_{4,13} = \left[\frac{(x_1 - x_0, e_{i_1})}{(x_3 - x_0, e_{i_1})} \Delta_{i_1} F\left(x_{(i_1,i_1,i_1,t)}\right)\Big|_{t=i_1+1} - \Delta_{i_1} F\left(x_{(i_1,t,t,t)}\right)\Big|_{t=i_1+1}\right] \cdot$$
$$\cdot \left(x_1 - x_0, e_{i_1}\right)^{-1} \prod_{l=2}^{3} \left(x_3 - x_{l-1}, e_{i_1}\right)^{-1} \left(x_4 - x_3, e_{i_1}\right)^{-1}.$$

Доведемо сформульоване вище твердження.

Має місце

**Теорема 1.** *Для того, щоб операторний поліном (2.5) з властивостями (2.6), (2.7), побудований згідно з (1.9),(1.11), (1.12), був інтерполяційним для оператора $F : H \to Y$ на зліченному вузлі (1.2) необхідно і достатньо, щоб його елементи визначались з формул (1.9), (1.11), (1.12).*

*Доведення.* $\square$ Для випадків $n = 1,\ 2,\ 3$ , тобто для поліномів $p_1^{mN}(x)$ , $p_2^{mN}(x)$ , $p_3^{mN}(x)$ доведення інтерполяційності здійснено в [13]. Оскільки поліном (1.13) – (1.14) побудований згідно з (1.9), (1.11), (1.12) при $n = 4$ , то довівши його інтерполяційність у вузлі $x_{(k_1,k_2,k_3,k_4)}$, можемо стверджувати, що операторний поліном (2.5) з властивостями (2.6), (2.7), побудований згідно з (1.9), (1.11), (1.12) буде інтерполяційним для оператора $F : H \to Y$ на зліченному вузлі (1.2) за будь-якого $n$ .

Спочатку доведемо достатні умови. Для цього підставимо континуальний вузол $x_{(k_1,k_2,k_3,k_4)}$ у формулу (1.13)–(1.14) і доведемо, що виконується умова інтерполяційності $P_4^{mN}\left(x_{(k_1,k_2,k_3,k_4)}\right) = F\left(x_{(k_1,k_2,k_3,k_4)}\right)$ .

Маємо

$$p_{4,0}(x_{\mathbf{k}^4}) + p_{4,1}(x_{\mathbf{k}^4}) = -p_{3,0}(x_{\mathbf{k}^4}) - p_{2,0}(x_{\mathbf{k}^4}) + \tag{1.15}$$

$$+\sum_{i_1=k_1}^{k_2-1}\sum_{i_2=k_2}^{k_3-1}\Delta_{\mathbf{i}^2}F(x_{(\mathbf{i}^2,k_3,k_4)}) + \sum_{i_1=k_1}^{k_2-1}\sum_{i_2=k_3}^{k_4-1}\Delta_{\mathbf{i}^2}F(x_{(\mathbf{i}^3,k_4)})\Big|_{i_3=i_2+1}\frac{(x_3-x_1,e_{i_2})}{(x_2-x_1,e_{i_2})}+$$

$$+\sum_{i_1=k_2}^{k_3-1}\sum_{i_2=i_1+1}^{k_3-1}\Delta_{\mathbf{i}^2}F(x_{(\mathbf{i}^2,k_3,k_4)})\frac{(x_2-x_0,e_{i_1})}{(x_1-x_0,e_{i_1})} + \sum_{i_1=k_2}^{k_3-1}\sum_{i_2=k_3}^{k_4-1}\Delta_{\mathbf{i}^2}F(x_{(\mathbf{i}^3,k_4)})\Big|_{i_3=i_2+1}\frac{(x_2-x_0,e_{i_1})}{(x_1-x_0,e_{i_1})}\frac{(x_3-x_1,e_{i_2})}{(x_2-x_1,e_{i_2})}+$$

$$+\sum_{i_1=k_3}^{k_4-1}\sum_{i_2=i_1+1}^{k_4-1}\Delta_{\mathbf{i}^2}F(x_{(\mathbf{i}^3,k_4)}\Big|_{i_3=i_2+1}\frac{(x_3-x_0,e_{i_1})}{(x_1-x_0,e_{i_1})}\frac{(x_3-x_1,e_{i_2})}{(x_2-x_1,e_{i_2})}+$$

$$+\sum_{i_1=k_1}^{k_2-1}\sum_{i_2=k_4}^{\infty}\Delta_{\mathbf{i}^2}F(x_{(z_1,z_2,z_2,z_2)}) + \sum_{i_1=k_2}^{k_3-1}\sum_{i_2=k_4}^{\infty}\Delta_{\mathbf{i}^2}F(x_{(z_1,z_2,z_2,z_2)})\frac{(x_2-x_0,e_{i_1})}{(x_1-x_0,e_{i_1})}+$$

$$+\sum_{i_1=k_3}^{k_4-1}\sum_{i_2=k_4}^{\infty}\Delta_{\mathbf{i}^2}F(x_{(z_1,z_2,z_2,z_2)})\frac{(x_3-x_0,e_{i_1})}{(x_1-x_0,e_{i_1})} + \sum_{i_1=k_4}^{\infty}\sum_{i_2=i_1+1}^{\infty}\Delta_{\mathbf{i}^2}F(x_{(z_1,z_2,z_2,z_2)})\frac{(x_4-x_0,e_{i_1})}{(x_1-x_0,e_{i_1})}+$$

$$+\sum_{i_1=k_4}^{\infty}\Delta_{\mathbf{i}^1}F(x_{(z_1,z_2,z_2,z_2)}\Big|_{i_2=i_1+1}\frac{(x_4-x_0,e_{i_1})}{(x_1-x_0,e_{i_1})} - \sum_{i_1=k_4}^{\infty}\Delta_{\mathbf{i}^1}F(x_{(z_1,z_1,z_1,z_1)})\ .$$

Далі поступаємо аналогічно і знаходимо

$$p_{4,2}(x_{\mathbf{k}^4}) = -p_{2,1}(x_{\mathbf{k}^4}) - p_{3,1}(x_{\mathbf{k}^4}) - p_{3,2}(x_{\mathbf{k}^4})+$$

$$+\sum_{i_1=k_2}^{k_3-1}\sum_{i_2=k_3}^{k_4-1}\left[\Delta_{\mathbf{i}^2}F(x_{(i_1,i_1,i_2,k_4)}) - \Delta_{\mathbf{i}^2}F(x_{(i_1,t,i_2,k_4)})\Big|_{t=i_1+1}\frac{(x_2-x_0,e_{i_1})}{(x_1-x_0,e_{i_1})}\right]+$$

$$+\sum_{i_1=k_3}^{k_4-1}\sum_{i_2=i_1+1}^{k_4-1}\left[\Delta_{\mathbf{i}^2}F(x_{(i_1,i_1,i_2,k_4)})\frac{(x_1-x_0,e_{i_1})}{(x_2-x_0,e_{i_1})} - \Delta_{\mathbf{i}^2}F(x_{(i_1,t,i_2,k_4)})\Big|_{t=z_1}\right]\cdot$$

$$\cdot\frac{(x_3-x_0,e_1)}{(x_1-x_0,e_1)}\cdot\frac{(x_3-x_1,e_1)}{(x_2-x_1,e_1)}+$$

$$+\sum_{i_1=k_3}^{k_4-1}\left[\Delta_{i_1}\ F(x_{(i_1,i_1,t,k_4)})\Big|_{t=i_1+1}\frac{(x_1-x_0,e_{i_1})}{(x_2-x_0,e_{i_1})} - \Delta_{i_1}\ F(x_{(i_1,t,t,k_4)})\Big|_{t=i_1+1}\right]\cdot$$

$$\cdot\frac{(x_3-x_0,e_{i_1})}{(x_1-x_0,e_{i_1})}\cdot\frac{(x_3-x_1,e_{i_1})}{(x_2-x_1,e_{i_1})}+$$

$$+\sum_{i_1=k_2}^{k_3-1}\left[\Delta_{i_1}F(x_{(i_1,t,k_4,k_4)})\Big|_{t=i_1+1}\frac{(x_2-x_0,e_{i_1})}{(x_1-x_0,e_{i_1})} - \Delta_{i_1}F(x_{(i_1,i_1,k_4,k_4)})\right]+$$

$$+\sum_{i_1=k_3}^{k_4-1}\left[\Delta_{i_1}F(x_{(i_1,t,k_4,k_4)})\Big|_{t=i_1+1} - \Delta_{i_1}F(x_{(i_1,i_1,k_4,k_4)})\frac{(x_1-x_0,e_{i_1})}{(x_2-x_0,e_{i_1})}\right]\cdot$$

$$\cdot\frac{(x_3-x_0,e_{i_1})}{(x_1-x_0,e_{i_1})}\cdot\frac{(x_3-x_1,e_{i_1})}{(x_2-x_1,e_{i_1})}+$$

$$+\sum_{i_1=k_1}^{k_2-1}\sum_{i_2=k_3+1}^{k_4-1}\left[\Delta_{\mathbf{i}^2}F(x_{(i_1,i_2,i_2,k_4)}) - \Delta_{\mathbf{i}^2}\ F(x_{(i_1,i_2,t,k_4)})\Big|_{t=i_2+1}\frac{(x_3-x_1,e_{i_2})}{(x_2-x_1,e_{i_2})}\right]+$$

$$+\sum_{i_1=k_2}^{k_3-1}\sum_{i_2=k_3}^{k_4-1}\left[\Delta_{\mathbf{i}^2}F(x_{(i_1,i_2,i_2,k_4)})\frac{(x_2-x_1,e_{i_2})}{(x_3-x_1,e_{i_2})}-\Delta_{\mathbf{i}^2}\ F(x_{(i_1,i_2,t,k_4)})\big|_{t=i_2+1}\right]\cdot$$
$$\cdot\frac{(x_2-x_0,e_{i_1})}{(x_1-x_0,e_{i_1})}\frac{(x_3-x_1,e_{i_2})}{(x_2-x_1,e_{i_2})}+$$
$$+\sum_{i_1=k_3}^{k_4-1}\sum_{i_2=i_1+1}^{k_4-1}\left[\Delta_{\mathbf{i}^2}F(x_{(i_1,i_2,i_2,k_4)})\frac{(x_2-x_1,e_{i_2})}{(x_3-x_1,e_{i_2})}-\Delta_{\mathbf{i}^2}\ F(x_{(i_1,i_2,t,k_4)})\big|_{t=i_2+1}\right]\cdot$$
$$\cdot\frac{(x_3-x_0,e_{i_1})}{(x_1-x_0,e_{i_1})}\frac{(x_3-x_1,e_{i_2})}{(x_2-x_1,e_{i_2})}+$$
$$+\sum_{i_1=k_3}^{k_4-1}\left[\Delta_{\mathbf{i}^1}F(x_{(i_1,t,t,k_4)})\big|_{t=i_1+1}\frac{(x_3-x_0,e_{i_1})}{(x_1-x_0,e_{i_1})}-\Delta_{\mathbf{i}^1}F(x_{(i_1,i_1,i_1,k_4)})\right].$$

Продовжуючи, одержуємо

$$p_4^{mN}(x_{\mathbf{k}^4})=p_{4,0}(x_{\mathbf{k}^4})+p_{4,1}(x_{\mathbf{k}^4})+p_{4,2}(x_{\mathbf{k}^4})=-p_3^{mN}(x_{\mathbf{k}^4})-p_2^{mN}(x_{\mathbf{k}^4})-p_1^{mN}(x_{\mathbf{k}^4})+F\left(x_{\mathbf{k}^4}\right).$$

Звідси одержуємо $P_4^{mN}(x_{\mathbf{k}^4})=F\left(x_{\mathbf{k}^4}\right)$, що і треба було довести. ■

*Обернене твердження.* Нехай поліном (1.13) є інтерполяційним для оператора $F:H\to Y$ на зліченному вузлі (1.2) при $n=4$ ; $p_1^{mN}(x_{\mathbf{k}^4})$, $p_2^{mN}(x_{\mathbf{k}^4})$, $p_3^{mN}(x_{\mathbf{k}^4})$ - відомі з [13]. Покажемо, що його елементи визначаються за формулами (1.14). Для цього знайдемо $\nabla_{\mathbf{k}^4}F\left(x_{(\mathbf{k}^4)}\right)$ . Маємо

$$\Delta_{\mathbf{k}^4}F\left(x_{(\mathbf{k}^4)}\right)=(x_1-x_0,e_{k_1})\times$$
$$\times(x_2-x_1,e_{k_2})\,(x_3-x_2,e_{k_3})\,(x_4-x_3,e_{k_4})\,a_{4,0}.$$

З останньої рівності після заміни $k_1,k_2,k_3,k_4$ відповідно на $i_1,i_2,i_3,i_4$ одержуємо $a_{4,0}$ .

Потім діємо аналогічно як і у разі знаходження $a_{4,0}$ . А саме, шукаємо $\Delta_{\mathbf{k}^3}F\left(x_{(\mathbf{k}^3,k_3)}\right)$ та $\Delta_{\mathbf{k}^3}F\left(x_{(k_1,k_2,k_2,k_3)}\right)$ , а з них відповідно одержуємо $a_{4,1}$ та $a_{4,10}$ . Одержані елементи підставляємо в (1.13) та знаходимо $\Delta_{\mathbf{k}^3}F\left(x_{(k_1,k_1,k_2,k_3)}\right)$, а з неї знаходимо $a_{4,4}$ . З $\Delta_{\mathbf{k}^2}F\left(x_{(k_1,k_2,k_2,k_2)}\right)$ знаходимо $a_{4,2}$ та $a_{4,11}$ . Знову підставляємо одержані елементи в (1.13) і знаходимо з $\Delta_{\mathbf{k}^2}F\left(x_{(k_1,k_1,k_2,k_2)}\right)$ - $a_{4,8}$ та $a_{4,5}$ ; з $\Delta_{\mathbf{k}^2}F\left(x_{(k_1,k_1,k_1,k_2)}\right)$ - $a_{4,12}$ та $a_{4,6}$ ; з $\Delta_{\mathbf{k}^2}F\left(x_{(k_1,k_1,k_1,k_1)}\right)$ - $a_{4,3}$ , $a_{4,7}$ , $a_{4,9}$ та $a_{4,13}$ .

Обернене твердження доведено. Отже, доведена і вся теорема.

Знайдемо залишковий член інтерполяційного операторного полінома (2.5) з властивостями (2.6), (2.7) побудованого згідно з (1.9), (1.11), (1.12).

Справедлива

**Теорема 2.** *Нехай для фіксованих* $x_0$ , $x_1,\ldots,x_{n-1}$ *і довільного* $x$ *з* $H$ *оператор* $F:H\to Y$ *є таким, що всі нескінченні суми від норм елементів, що входять в них згідно з (1.9), (1.11), (1.12) менші від* $\infty$ *. Тоді для цього оператора має місце представлення* $F\left(x\right)=P_n^{mN}(x)+R_n^{mN}\left(x\right)$ *, де* $R_n^{mN}\left(x\right)=p_{n+1}^{mN}\left(x\right)\big|_{x_{n+1}}=x$ .

*Доведення.* □ Для випадку $n=2$ теорема доведена в [13]. Припустимо, що теорема справджується для $n-1$ і доведемо її справедливість для $n$ .

У загальному випадку матимемо

$$R_n^{mN}(x)=p_{n+1}^{mN}(x)\big|_{x_{n+1}=x}=$$
$$[p_{n+1,0}(x))+p_{n+1,1}(x)+p_{n+1,2}(x)]_{x_{n+1}=x}.$$

Згідно з формулою (1.9), за якою побудований поліном $p_{n+1,0}(x)+p_{n+1,1}(x)$ , при $x_{n+1}=x$ маємо

$$[p_{n+1,0}(x)+p_{n+1,1}(x)]_{x_{n+1}=x}=$$
$$=-F\left(x_0\right)-\sum_{k=1}^{n}p_{k,0}\left(x\right)+F\left(x\right).$$

Аналогічно згідно з формулами (1.11), (1.12), за якими побудований поліном $p_{n,2}(x)$ , при $x_{n+1}=x$ маємо

$$p_{n+1,2}(x)\big|_{x_{n+1}=x}=-\sum_{k=2}^{n}\left[p_{k,1}\left(x\right)+p_{k,2}\left(x\right)\right],$$

$n=2,3,4,\ldots$ , $p_{2,2}\left(x\right)\equiv 0$ .

Звідси $R_n^{mN}(x)=-P_n^{mN}(x)+F(x(\cdot))$ .

Отже, одержали аналог формули (2.8) за умови не виконання правила підстановки

$P_n^{mN}(x)+R_n^{mN}(x)=P_{n-1}^{mN}(x)+R_{n-1}^{mN}(x)=\cdots=$
$=P_0^{mN}(x)+R_0^{mN}(x)=F\left(x\right)$,

що і треба було довести. ■

## Висновки

Встановлені необхідні та достатні умови інтерполяційності операторного полінома типу Ньютона $n$-степеня на зліченній множині інтерполяційних вузлів на гільбертовому просторі, який не вимагає виконання правила підстановки.

Знайдено залишковий член інтерполяційного полінома $n$-степеня.

## Література


[1] Prenter P.M. Lagrange and Hermite interpolation in Banach spaces // Appr. Theory, 1971. – № 4. – P. 419–432.

[2] Porter W.A. Synthesis of polynomic system // SIAM J. Math. Anal, 1980. – № 11. – № 2. – P. 308–315.

[3] Соболевский П.И. Интерполяция функционалов и некоторые приближенные формулы для интегралов по гауссовой мере // Изв. АН БССР. Сер. физ. - мат. наук, 1975. – № 2. – С. 5–12.

[4] Egorov A.D., Sobolevsky P.I., Yanovich L.A. Functional Integrals: Approximate Evaluation and Applications. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1993. – 419 p.

[5] Micchelli C.A. A constructive approach to Kergin interpolation in $\Re^k$ // Rocky Mountain J.Math., 1980. – № 10. – P. 485–497.

[6] Micchelli C.A., Milman P. A formula for Kergin interpolation in $\Re^n$ // J.Approx. Theory, 1980. – № 29. – P. 294–296.

[7] Andersson M.,Passare M. Complex Kergin Interpolation // J.Approx. Theory, 1991. – № 64. – P. 214–225.

[8] Filipsson L. Kergin interpolation in Banach spaces // J.Approx. Theory, 2004. – № 127. – P. 108–123.

[9] Макаров В.Л., Хлобыстов В.В., Янович Л.А. Интерполирование операторов. – К.: Наукова думка, 2000. – 407 с.

[10] Макаров В.Л., Хлобыстов В.В. Интерполяционная формула типа Ньютона для нелинейных функционалов // Докл. АН СССР. – 1989. – № 307. – № 3. – С. 534–537.

[11] Макаров В.Л., Демків І.І., Михальчук Б.Р. Необхідні і достатні умови існування функціонального інтерполяційного полінома на континуальній множині вузлів // ДАН України, 2003. – № 7. – С. 7–12.

[12] Макаров В.Л., Демків І.І. Існування єдиного, інваріантного інтерполяційного операторного полінома на гільбертовому просторі // ДАН України. – 2003. – № 12. – С. 21–26.

[13] Демків І.І. Інтерполяційний операторний поліном третього степеня на зліченій множині вузлів. // Вісник Львів. Ун-ту. Сер. прикл. матем. інформ. (подано до друку).


## ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ОПЕРАТОРНЫЕ ПОЛИНОМЫ НА ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ


И. Демкив

*Национальный университет "Львивська политехника",*
*ул. С. Бандеры, 12, Львов, 79013, Украина*



Установлены необходимые и достаточные условия интерполяционности операторного полинома типа Ньютона, для которого не требуется выполнения правила подстановки. Найден остаточный член построенного полинома.



**Ключевые слова:** интерполяционный полином, континуальные узлы.

**2000 MSC:** 65D05,65D15

**УДК:** 519.65


## INTERPOLATION OPERATOR POLYNOMIALS ON HILBERT SPASE


I. Demkiv

*National University "Lvivska Politechnika"*
*12 S. Bandera Str., 79013, Lviv, Ukraine*



Necessary and sufficient conditions for polynomial to be interpolational operator polynomial of Newton type which does not need the substitution rule to be applied are established in this paper. The remainder term of the polynomial constructed is found



**Key words:** interpolation polynomial, continual knot.

**2000 MSC:** 65D05,65D15

**УДК:** 519.65