ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
Вип.696 № 696, (2011) с. 11–14

JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY
"LVIVSKA POLITECHNIKA"
"Physical & mathematical sciences"
Vol.696 No 696, (2011) 11–14

ПРО ТОЧНІСТЬ ОПИСАННЯ ВЕЛИЧИНИ ВИНЯТКОВОЇ МНОЖИНИ У ТЕОРЕМАХ ТИПУ ВІМАНА-ВАЛІРОНА

О.Б. Скасків[a], Т.М. Сало[b]

[a] *Львівський національний університет імені Івана Франка*
вул. Університетська 1, 79000, Львів, Україна
[b] *Національний університет "Львівська політехніка"*
вул. С. Бандери 12, 79013, Львів, Україна

(Отримано 13 квітня 2010 р.)

Доведено непокращуваність оцінок виняткових множин в асимптотичних рівностях максимуму модуля, мінімуму модуля і максимального члена цілих рядів Діріхле швидкого зростання.

Ключові слова: ряд Діріхле, максимум модуля, максимальний член, центральний індекс.
2000 MSC: 30B50
УДК: 517.576

Нехай $H(\lambda)$ – клас цілих (абсолютно збіжних у всій компексній площині) рядів Діріхле вигляду

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{z\lambda_n}, \tag{1}$$

з фіксованою послідовністю показників $\lambda = (\lambda_n)$, $0 = \lambda_0 < \lambda_n \uparrow +\infty$ $(1 \le n \to +\infty)$.

Для $F \in H(\lambda)$ і $x \in \mathbb{R}$ позначимо

$$M(x,F) = \sup\{|F(x+iy)| : y \in \mathbb{R}\},$$

$$m(x,F) = \inf\{|F(x+iy)| : y \in \mathbb{R}\},$$

$$\mu(x,F) = \max\{|a_n|e^{x\lambda_n} : n \ge 0\},$$

$$\nu(x,F) = \max\{n : |a_n|e^{x\lambda_n} = \mu(x,F)\}.$$

Відомо ([1]), що умова

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} < +\infty \tag{2}$$

є необхідною і достатньою для того, щоб для кожної цілої функції $F \in H(\lambda)$ співвідношення

$$M(x,F) = (1+o(1))\mu(x,F), \; M(x,F) = (1+o(1))m(x,F) \tag{3}$$

виконувались при $x \to +\infty$ ззовні деякої множини $E = E(F) \subset [0,+\infty)$ скінченної міри Лебега $(meas(E) = \int_E dx < +\infty)$.

У [2] доведено, що для кожної додатної неперервної на $[0,+\infty)$ функції l, такої, що $l(x) \nearrow +\infty$ при $x \to +\infty$, для кожної λ (зокрема такої, що виконується умова (2)) існують $F \in H(\lambda)$, множина $E \subset [0,+\infty)$ і стала $d > 0$ такі, що

$$(\forall x \in E) : F(x) > (1+d)\mu(x,F), \; F(x) > (1+d)m(x,F) \tag{4}$$

і $meas_l(E) := \int_E l(x)dx = +\infty$. Тобто, скінченність міри Лебега є непокращуваним описом виняткової множини у співвідношеннях (3).

Варто також зазначити, що у випадку, коли цілий ряд Діріхле не є експоненційним поліномом, то виняткова множина $E(F)$ у співвідношеннях (3) є необмеженою. Для того, щоб у цьому переконатись досить, наприклад, розглянути послідовність $(\varkappa_k)$ точок стрибка центрального індексу $\nu(x,F)$. Справді, для кожного $k \ge 1$ існує принаймі два члени ряду Діріхле з номерами n_k і m_k таких, що $|a_{n_k}|e^{\varkappa_k\lambda_{n_k}} = |a_{m_k}|e^{\varkappa_k\lambda_{m_k}} = \mu(\varkappa_k,F)$. Тоді, з рівності Парсеваля одержуємо

$$2(\mu(\varkappa_k,F))^2 < \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^2 e^{2\varkappa_k\lambda_n} =$$

$$= \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |F(\varkappa_k+iy)|^2 dy \le (M(\varkappa_k,F))^2.$$

Тобто виконується нерівність $M(\varkappa_k,F) > \sqrt{2}\,\mu(\varkappa_k,F)$. Звідси одержуємо, що $\{\varkappa_k : k \ge 1\} \subset E(F)$. Залишається пригадати, що $\varkappa_k \uparrow +\infty$ $(k \to +\infty)$.

У підкласах класу $H(\lambda)$, що визначаються обмеженнями на мінімально можливу швидкість зростання максимального члена $\mu(x,F)$, опис виняткових множин можна уточнити (див. [3–5]).

Нехай L – клас додатних неперервних зростаючих до $+\infty$ на $[0,+\infty)$ функцій. Для $h,l \in L$ і вимірної множини $E \subset [0,+\infty)$ скінченної міри Лебега визначимо такі асимптотичні щільності у нескінченності:

$$d_h(E) = \varliminf_{x\to+\infty} h(x)meas(E \cap [x,+\infty)),$$

$$d_{h,\ell}(E) = \varliminf_{x\to+\infty} h(x)meas_l(E \cap [x,+\infty)).$$

Нехай $\Phi \in L$, а $\varphi(x)$ – функція обернена до Φ. Визначимо такий клас додатних функцій

$$L_\varphi = \{h \in L: \ \frac{h(\varphi(x))}{x} \ln x \to 0,$$

$$h(2x) = O(h(x)), x \to +\infty\}.$$

Нехай $H(\lambda, \Phi)$ клас цілих рядів Діріхле $F \in H(\lambda)$ таких, що

$$(\exists K_F > 0): \ln \mu(x, F) \geq K_F x \Phi(x) \qquad (x \geq x_0).$$

Теорема A[4]. *Нехай $\Phi \in L$, $h \in L_\varphi$. Якщо*

$$(\forall b > 0): \varliminf_{x\to+\infty} h(x) \sum_{\lambda_n > b\Phi(x)} \frac{1}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = 0, \qquad (5)$$

то для кожної функції $F \in H(\lambda, \Phi)$ співвідношення (3) виконуються при $x \to +\infty$, $x \in [0, +\infty)\backslash E$, $d_h(E) = 0$.

Метою роботи є показати, що описання величини виняткової множини в межах теореми A у певному сенсі істотно покращити не можна, про що свідчить така теорема.

Теорема. *Нехай $\Phi(x) = x^\alpha$ $(\alpha > 0)$, $h \in L_\varphi$. Для кожної функції $\ell \in L$ існують послідовність λ, така, що виконується (5), функція $F \in H(\lambda, \Phi)$, множина $E \subset [0, +\infty)$ і стала d>0 такі, що*

$$(\forall x \in E): F(x) > (1 + d)\mu(x, F) \qquad (6)$$

і $d_{h,\ell}(E) > 0$.

Доведення. Позначимо $g(x) = h(\varphi(x))l(\varphi(x))$. Очевидно, що $g \in L$. Розглянемо послідовність (λ_n), для якої $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 1$, а решта члени визначаються рекурентною формулою

$$\lambda_n = \lambda_{n-1} + \frac{g(\lambda_{n-1})g(\lambda_{n-2})}{g(\lambda_{n-1}) - g(\lambda_{n-2})} \qquad (n \geq 2).$$

Тоді

$$\frac{1}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} = \frac{1}{g(\lambda_{n-2})} - \frac{1}{g(\lambda_{n-1})},$$

і при $m > n$ маємо

$$\sum_{k=n}^{m} \frac{1}{\lambda_{k+1} - \lambda_k} = \frac{1}{g(\lambda_{n-1})} - \frac{1}{g(\lambda_m)},$$

а, отже,

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_{k+1} - \lambda_k} = \frac{1}{g(\lambda_{n-1})} = \frac{1}{h(\varphi(\lambda_{n-1}))l(\varphi(\lambda_{n-1}))}. \qquad (7)$$

Оскільки $\varphi(x) = x^{1/\alpha}$ і $h \in L_\varphi$, то $\forall b > 0$

$$\varliminf_{x\to+\infty} h(x) \sum_{\lambda_n > b\Phi(x)} \frac{1}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \leq$$

$$\leq \lim_{n\to+\infty} h\left(\varphi(\frac{\lambda_{n-1}}{b})\right) \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_{k+1} - \lambda_k} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{h(b^{-1/\alpha}\varphi(\lambda_{n-1}))}{h(\varphi(\lambda_{n-1}))l(\varphi(\lambda_{n-1}))} = 0.$$

Отже, для послідовності λ виконується (5).

Виберемо тепер $\varkappa_k = \sum_{k=1}^{n-2} r_k$ $(n \geq 2)$, де

$$r_1 = \max\left\{\varphi(\lambda_2), \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\right\},$$

$$r_k = \max\left\{\varphi(\lambda_{k+1}) - \varphi(\lambda_k), \frac{1}{\lambda_{k+1} - \lambda_k}\right\},$$

а також $a_0 = 1, a_n = \exp\{-\sum_{k=1}^{n} \varkappa_k(\lambda_k - \lambda_{k-1})\}$ $(n \geq 1)$, і покажемо, що функція F визначена рядом (1) з щойно визначеними коефіцієнтами (a_n) і показниками (λ_n) належить до класу $H(\lambda, \Phi)$.

Оскільки $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} < +\infty$, то $n = o(\lambda_n)$ $(n \to +\infty)$, а тому $\frac{\ln n}{\lambda_n} \to 0$ $(n \to +\infty)$. За побудовою $\varkappa_n \uparrow +\infty$ $(n \to +\infty)$ і $\varkappa_n = \frac{\ln a_{n-1} - \ln a_n}{\lambda_n - \lambda_{n-1}}$ $(n \geq 1)$, тоді за теоремою Штольца $\frac{-\ln a_n}{\lambda_n} \to +\infty$ $(n \to +\infty)$, і згідно з [6, с. 85] функція F належить класу $H(\lambda)$.

Крім того, добре відомо, що у цьому випадку

$$\forall x \in [\varkappa_n, \varkappa_{n+1}): \ \mu(x, F) = a_n e^{x\lambda_n}, \quad \nu(x, F) = n. \qquad (8)$$

Оскільки за побудовою

$$\varkappa_n \leq \varphi(\lambda_{n-1}) + \sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{\lambda_{k+1} - \lambda_k} \leq 2\varphi(\lambda_{n-1}) \quad (n > n_0),$$

то за доволі великих n для всіх $x \in [\varkappa_n, \varkappa_{n+1})$

$$\ln \mu(2x, F) = \ln \mu(x, F) + \int_x^{2x} \lambda_{\nu(t)} dt \geq x\lambda_{\nu(x)} = x\lambda_n \geq$$

$$\geq x\Phi\left(\frac{\varkappa_{n+1}}{2}\right) \geq x\Phi\left(\frac{x}{2}\right),$$

тобто при $x \geq x_0$ маємо

$$\ln \mu(x, F) \geq \frac{x}{2} \ \Phi(\frac{x}{4}) = \frac{1}{2^{1+2\alpha}} \ x \ \Phi(x),$$

а тому $F \in H(\lambda, \Phi)$.

Зауважимо, що

$$\varkappa_{n+1} - \varkappa_n = r_{n-1} \geq \frac{1}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} \quad (n \geq 1).$$

Для $x \in \left[\varkappa_n, \varkappa_n + \frac{1}{\lambda_n - \lambda_{n-1}}\right]$ маємо

$$\frac{a_{n-1}e^{x\lambda_{n-1}}}{\mu(x,F)} = \frac{a_{n-1}e^{x\lambda_{n-1}}}{a_n e^{x\lambda_n}} = \\ = \exp\{(\lambda_n - \lambda_{n-1})(\varkappa_n - x)\} \geq e^{-1} := d, \qquad (9)$$

а, отже, при $x \in E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\varkappa_n, \varkappa_n + \frac{1}{\lambda_n - \lambda_{n-1}}\right]$, вибираючи $n = \nu(x, F)$, одержуємо

$$F(x) \geq a_{n-1}e^{x\lambda_{n-1}} + a_n e^{x\lambda_n} =$$

$$= \mu(x,F)\left(1 + \frac{a_{n-1}e^{x\lambda_{n-1}}}{a_n e^{x\lambda_n}}\right) \geq (1+d)\mu(x,F)$$

і (6) доведено.

Залишається показати, що $d_{h,\ell}(E) > 0$. За побудовою для всіх $n \geq 1$ маємо

$$\varkappa_n \geq \varphi(\lambda_1) + \sum_{k=1}^{n-2}(\varphi(\lambda_{k+1}) - \varphi(\lambda_k)) = \varphi(\lambda_{n-1}). \quad (10)$$

Тепер зауважимо, що

$$\int\limits_{E\bigcap[\varkappa_n,+\infty)} \ell(t)dt = \sum_{k=n}^{+\infty} \int\limits_{\varkappa_k}^{\varkappa_k+\frac{1}{\lambda_k-\lambda_{k-1}}} \ell(t)dt \geq$$
$$\geq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\ell(\varkappa_k)}{\lambda_k - \lambda_{k-1}} \geq \ell(\varkappa_n) \sum_{k=n-1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_{k+1} - \lambda_k}. \quad (11)$$

Оскільки $\varkappa_n \uparrow +\infty$, то $(\forall x > \varkappa_1)$ $(\exists n = n(x)) : x \in [\varkappa_n; \varkappa_{n+1})$, тому враховуючи (10), (11) і (7), одержуємо

$$h(x) \int\limits_{E\bigcap[x,+\infty)} \ell(t)dt \geq h(\varkappa_n) \int\limits_{E\bigcap[\varkappa_{n+1},+\infty)} \ell(t)dt \geq$$

$$\geq h(\varphi(\lambda_{n-1}))\ell(\varphi(\lambda_n)) \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_{k+1} - \lambda_k} = \frac{\ell(\varphi(\lambda_n))}{\ell(\varphi(\lambda_{n-1}))} > 1.$$

Отже,

$$d_{h,\ell}(E) = \varliminf_{x\to+\infty} h(x) \int\limits_{E\bigcap[x,+\infty)} \ell(t)dt \geq 1.$$

Теорему доведено.

Нехай тепер

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n e^{z\lambda_n},$$

де (a_n), (λ_n) – означені у доведенні теореми. Очевидно, що $F_1 \in H(\lambda, \Phi)$. Повторимо міркування, що призвели до твердження 4 в [2]. Оскільки $\varkappa_n \uparrow +\infty$ $(n \to +\infty)$, то легко перевіряється, що для всіх $x \in [\varkappa_n, \varkappa_{n+1}]$

$$a_m e^{x\lambda_m} \leq a_{m+1}e^{x\lambda_{m+1}} \ (0 \leq m \leq n-1),$$

$$a_m e^{x\lambda_m} \geq a_{m+1}e^{x\lambda_{m+1}} \ (m \geq n).$$

Тому

$$m(x, F_1) \leq |F_1(x)| \leq \mu(x, F_1) = \mu(x, F),$$

де F – функція з доведення теореми.

За рівністю Парсеваля

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} |F_1(x+iy)|^2 dy = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 e^{2x\lambda_n}.$$

Враховуючи (9), для всіх $x \in E$ (E – множина з доведення теореми) маємо

$$|M(x, F_1)|^2 \geq (1+d^2)(\mu(x, F_1))^2,$$

тому для $x \in E$ одночасно виконуються нерівності

$$M(x, F_1) \geq (1+d^2)^{1/2}\mu(x, F_1),$$

$$M(x, F_1) \geq (1+d^2)^{1/2}m(x, F_1).$$

Тобто одержали таке твердження.

Наслідок. *Нехай $\Phi \in L$, $h \in L_\varphi$. Для кожної функції $\ell \in L$ існують послідовність λ, така, що виконується (5), функція $F \in H(\lambda, \Phi)$, множина $E \subset [0, +\infty)$ і стала $d>0$ такі, що співвідношення (3) одночасно не виконується на множині E і $d_{h,\ell}(E) > 0$.*

Література

[1] Скасків О.Б. Максимум модуля і максимальний член цілого ряду Діріхле// Доп. АН УРСР, сер.А. – 1984. – № 11. – С.22–24.

[2] Salo T.M., Skaskiv O.B., Trakalo O.M. On the best possible description of exceptional set in Wiman-Valiron theory for entire functions// Mat.Stud. – 2001. – v. 16, № 2. – P.131–140.

[3] Скасків О.Б., Сало Т.М. Цілі ряди Діріхле швидкого зростання і нові оцінки міри виняткових множин в теоремах типу Вімана-Валірона // Укр. мат. журн. – 2001. – Т. 53, № 6. – С.830–839.

[4] Сало Т.М. Про виняткову множину в асимптотичній рівності суми і максимального члена цілого ряду Діріхле швидкого зростання// Матем. студії. – 2001. –Т. 15, № 1. – С. 57–64.

[5] Сало Т.М. Про величину виняткової множини в асимптотичній рівності максимального члена та суми цілого ряду Діріхле швидкого зростання // Вісник Львів. ун-ту – 2002. – Вип. 60. – С. 115–121.

[6] Леонтьев А.Ф. Целые функции. Ряды експонент. – М.: Наука, 1983. – 176 с.

О ТОЧНОСТИ ОПИСАНИЯ РАЗМЕРА ИСКЛЮЧИТЕЛЬНОГО МНОЖЕСТВА В ТЕОРЕМАХ ТИПА ВИМАНА-ВАЛИРОНА

О.Б. Скаскив[a], Т.М. Сало[b]

[a] *Львовский национальный университет имени Ивана Франко ул. Университетская, 1, Львов, 79001, Украина*
[b] *Национальный университет "Львивська политехника", ул. С. Бандеры, 12, Львов, 79013, Украина*

Устанавливается точность оценки исключительных множеств в асимптотических равенствах максимума модуля, минимума модуля и максимального члена целого ряда Дирихле быстрого возрастания.

Ключевые слова: ряд Дирихле, максимум модуля, максимальний член, центральний индекс.

2000 MSC: 30B50

УДК: 517.576

ON THE BEST POSSIBLE DESCRIPTION OF EXCEPTIONAL SET IN THEOREMS OF WIMAN-VALIRON TYPE

O.B. Skaskiv[a], T.M. Salo[b]

[a] *Lviv Nacional University named after Ivan Franko Universitetska Str., 79000, Lviv, Ukraine*
[b] *National University "Lvivska Politechnika" 12 S. Bandera Str., 79013, Lviv, Ukraine*

We proved sharpness of estimate of the size of an exceptional sets in asymptotic relations between maximum modulus, minimum modulus and maximal term for entire Dirichlet series of rapid growth.

Key words: Dirichlet series, maximum modulus, maximal term, central index.

2000 MSC: 30B50

УДК: 517.576