

ІМОВІРНІСНА ОЦІНКА МІЦНОСТІ КРИХКИХ МАТЕРІАЛІВ

Р.І. Квіт

Національний університет “Львівська політехніка”
 вул. С. Бандери 12, 79013, Львів, Україна

(Отримано 16 лютого 2011 р.)

Оцінено міцність ізотропної пластини, яка містить стохастично розподілені тріщини обмеженої довжини, з використанням детерміністичного критерію руйнування, що враховує початковий напрямок поширення тріщини. Виведено співвідношення для густини розподілу ймовірностей граничного навантаження пластини із заданою дефектністю за різних видів напруженого стану. Побудовано діаграми граничного стану, які відповідають середнім значенням руйнівного навантаження. Досліджено вплив на міцність структурної неоднорідності матеріалу, площі пластини і характеру напруженого стану.

Ключові слова: критерій міцності, ізотропна пластинка з тріщиною, руйнівне навантаження.

2000 MSC: 82B31

УДК: 539.4

Вступ

Імовірнісна оцінка руйнівного стану за заданого навантаження є важливим етапом у розрахунках на міцність і надійність деталей машин та елементів конструкцій. Міцність матеріалу залежить від дефектів структури і завжди є деякою випадковою величиною. Тому для розв’язування задач прогнозування граничного стану конструкційних матеріалів важливим є застосування статистичних методів. За останні роки статистичні теорії, застосовані до вивчення міцності матеріалів з дефектами структури, набули розвитку у роботах [1–6]. Метою дослідження є побудова критерію крихкого руйнування ізотропних пластин за умов розтягу-стиску, який модифікований для випадку врахування початкового напрямку поширення тріщини (відхилення розвитку тріщини

від початкової орієнтації).

I. Постановка задачі

У роботі [7] отримано співвідношення, які визначають функцію розподілу граничного (руйнівного) навантаження для прямокутних ізотропних пластин з однаковою тріщиностійкістю матеріалу за умов всебічного розтягу-стиску у двох взаємно перпендикулярних напрямках навантаженням p та q ($q = \eta p$). Дослідження ґрунтується на детерміністичному критерії руйнування [8], що враховує початковий напрямки поширення тріщини. У припущенні рівномірного розподілу тріщин та обмеження їх розмірів, отримано вирази функції розподілу граничного навантаження для елемента пластини з одним дефектом:

1) для випадку $0 \leq \eta \leq 1$ ($p > 0, q \geq 0$)

$$F_1(p, \eta) = \begin{cases} \Psi_1\left(\frac{K^2}{p^2c}, \eta\right) = \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\pi/2} \left[1 - \frac{K^2}{p^2c} \varphi_1^2(\alpha, \eta)\right]^{r+1} d\alpha, & \frac{K}{\sqrt{c}} \leq p \leq \frac{K}{\eta\sqrt{c}} \quad (\eta \neq 1); \\ \Psi_2\left(\frac{K^2}{p^2c}, \eta\right) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left[1 - \frac{K^2}{p^2c} \varphi_1^2(\alpha, \eta)\right]^{r+1} d\alpha, & \frac{K}{\eta\sqrt{c}} \leq p < \infty \quad (\eta \neq 0); \end{cases} \quad (1)$$

2) для випадку $-1 \leq \eta < 0$ ($p > 0, q < 0$)

$$F_1(p, \eta) = \begin{cases} \Psi_3\left(\frac{K^2}{p^2c}, \eta\right) = \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_3}^{\pi/3} \left[1 - \frac{K^2}{p^2c} \varphi_2^2(\alpha, \eta, \rho)\right]^{r+1} d\alpha, & \frac{0,125\sqrt{3}K}{\sqrt{|\eta|c}} \leq p \leq \frac{\varphi_1(\pi/3, \eta)K}{\sqrt{c}} \quad (\eta \neq -1); \\ \Psi_4\left(\frac{K^2}{p^2c}, \eta\right) = \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_3}^{\alpha_0} \left[1 - \frac{K^2}{p^2c} \varphi_2^2(\alpha, \eta, \rho)\right]^{r+1} d\alpha + & \\ + \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\pi/3} \left[1 - \frac{K^2}{p^2c} \varphi_1^2(\alpha, \eta)\right]^{r+1} d\alpha, & \frac{\varphi_1(\pi/3, \eta)K}{\sqrt{c}} \leq p < \infty; \end{cases} \quad (2)$$

3) для випадку $-(\rho + \sqrt{1 + \rho^2})^2 \leq \eta < -1$ ($p \geq 0$, $q < 0$)

$$F_1(p, \eta) = \begin{cases} \Psi_3\left(\frac{K^2}{p^2c}, \eta\right), & \frac{0,125\sqrt{3}K}{\sqrt{|\eta|c}} \leq p \leq \frac{\varphi_1(\alpha_0, \eta)K}{\sqrt{c}}; \\ \Psi_5\left(\frac{K^2}{p^2c}, \eta\right) = \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_3}^{\alpha_0} \left[1 - \frac{K^2}{p^2c} \varphi_2^2(\alpha, \eta, \rho)\right]^{r+1} d\alpha + \\ + \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \left[1 - \frac{K^2}{p^2c} \varphi_1^2(\alpha, \eta)\right]^{r+1} d\alpha, & \frac{\varphi_1(\alpha_0, \eta)K}{\sqrt{c}} \leq p < \infty; \end{cases} \quad (3)$$

4) для випадку $-\infty < \eta \leq -(\rho + \sqrt{1 + \rho^2})^2$ ($p \geq 0$, $q < 0$)

$$F_1(p, \eta) = \begin{cases} \Psi_6\left(\frac{K^2}{p^2c}, \eta\right) = \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_3}^{\alpha_4} \left[1 - \frac{K^2}{p^2c} \varphi_2^2(\alpha, \eta, \rho)\right]^{r+1} d\alpha, \\ \frac{0,25\sqrt{3}K}{\sqrt{c}} [(1 - \eta)\sqrt{1 + \rho^2} + \rho(1 + \eta)]^{-1} \leq p \leq \frac{0,125\sqrt{3}K}{\sqrt{|\eta|c}}; \\ \Psi_3\left(\frac{K^2}{p^2c}, \eta\right), & \frac{0,125\sqrt{3}K}{\sqrt{|\eta|c}} \leq p \leq \frac{\varphi_1(\alpha_0, \eta)K}{\sqrt{c}}; \\ \Psi_5\left(\frac{K^2}{p^2c}, \eta\right), & \frac{\varphi_1(\alpha_0, \eta)K}{\sqrt{c}} \leq p < \infty. \end{cases} \quad (4)$$

Тут позначено:

$$\varphi_1(\alpha, \eta) = \sec^2 \frac{\theta_*}{2} \left[\cos \frac{\theta_*}{2} (\sin^2 \alpha + \eta \cos^2 \alpha) - 1, 5(1 - \eta) \sin 2\alpha \sin \frac{\theta_*}{2} \right]^{-1};$$

$$\varphi_2(\alpha, \eta, \rho) = 0,25\sqrt{3} [(1 - \eta) \sin 2\alpha + 2\rho(\sin^2 \alpha + \eta \cos^2 \alpha)]^{-1};$$

ρ – коефіцієнт тертя між берегами тріщини ($0 \leq \rho \leq 1$); θ_* – кут, що визначає початковий напрямок поширення тріщини [8]; $K = K_{Ic}/\sqrt{\pi}$, де K_{Ic} – коефіцієнт інтенсивності напружень; $\alpha_0 = \arctg \sqrt{-\eta}$; параметри $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ мають відповідне аналітичне представлення [7].

Для випадку $1 < \eta < \infty$ ($p > 0$) або $-\infty < \eta < 0$ ($q > 0$), замінивши у відповідних співвідношеннях для функції розподілу $F_1(p, \eta)$ величини p та η , відповідно, на q та $\eta_1 = 1/\eta$, отримуємо функцію розподілу $F_1(q, \eta_1)$

II. Густина розподілу ймовірностей граничного навантаження

Використаємо співвідношення (1)–(4) для знаходження густини розподілу ймовірностей граничного

навантаження пластини з N дефектами (тріщинами).

Функція розподілу граничного навантаження для пластини, що містить N ізольованих дефектів, визначається формулою [9]

$$F_N(p, \eta) = 1 - [1 - F_1(p, \eta)]^N. \quad (5)$$

Тоді густина розподілу ймовірностей граничного навантаження для вказаної пластини, відповідно до виразу (5), запишеться у вигляді

$$f_N(p, \eta) = N [1 - F_1(p, \eta)]^{N-1} \frac{dF_1(p, \eta)}{dp}. \quad (6)$$

Розглянемо деякі часткові випадки: двовісного симетричного розтягу ($p = q > 0$, $\eta = 1$) та одновісного розтягу ($p > 0$, $q = 0$, $\eta = 0$).

За двовісного симетричного розтягу густина розподілу (6) визначається так:

$$f_N(p, 1) = 2N(r+1) \frac{K^2}{p^3c} \left[1 - \frac{K^2}{p^2c}\right]^r \left(1 - \left[1 - \frac{K^2}{p^2c}\right]^{r+1}\right)^{N-1}, \quad \frac{K}{\sqrt{c}} \leq p < \infty. \quad (7)$$

За одновісного розтягу маємо

$$f_N(p, 0) = \frac{2N}{\pi} [1 - F_1(p, 0)]^{N-1} \left(2(r+1) \frac{K^3}{p^3c^{3/2}} \int_{\arcsin \frac{K}{p\sqrt{c}}}^{\pi/2} \varphi_1^2(\alpha, 0) \left[1 - \frac{K^2}{p^2c} \varphi_1^2(\alpha, 0)\right]^r d\alpha + \right. \\ \left. + \frac{K^2}{p\sqrt{c}\sqrt{p^2c - K^2}} \left[1 - \frac{K^2}{p^2c} \varphi_1^2\left(\arcsin \frac{K}{p\sqrt{c}}\right)\right]^{r+1} \right), \quad \frac{K}{\sqrt{c}} \leq p < \infty, \quad (8)$$

де функція розподілу $F_1(p, 0)$, відповідно до виразу (1) запишеться так:

$$F_1(p, 0) = \frac{2}{\pi} \int_{\arcsin \frac{K}{p\sqrt{c}}}^{\pi/2} \left[1 - \frac{K^2}{p^2 c} \varphi_1^2(\alpha, 0) \right]^{r+1} d\alpha .$$

Запишемо бета-розподіл [7] випадкової величини l при $r = 1$. У цьому випадку диференціальна функція розподілу визначається співвідношенням

$$f_2(l) = \frac{2}{c} \left(1 - \frac{l}{c} \right) , \quad (9)$$

де c – скінченна структурна характеристика матеріалу [7].

Цей розподіл називають лінійно спадним або напівтрикутним [10] і його фізичний зміст полягає у зменшенні ймовірності зустрічі дефекту у матеріалі зі збільшенням його довжини.

У разі лінійно спадного розподілу довжин тріщин співвідношення (7) та (8) співпадають з отриманими в роботі [9].

Відповідно до виразів (7) та (8) на рис. 1–4 побудовано графіки густини розподілу ймовірностей граничного навантаження для різних видів напруженого стану ($\eta = 1$ та $\eta = 0$). Отримано унімодальні розподіли випадкової величини граничного навантаження.

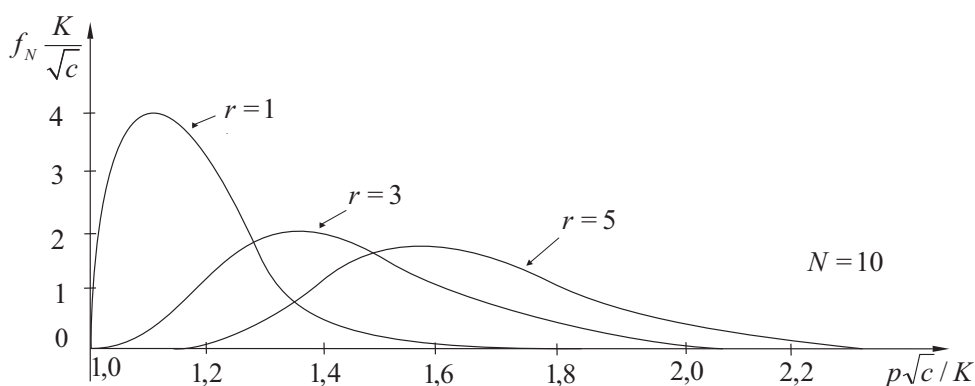


Рис. 1. Густина розподілу ймовірностей граничного навантаження за двовісного симетричного розтягу для різної неоднорідності матеріалу

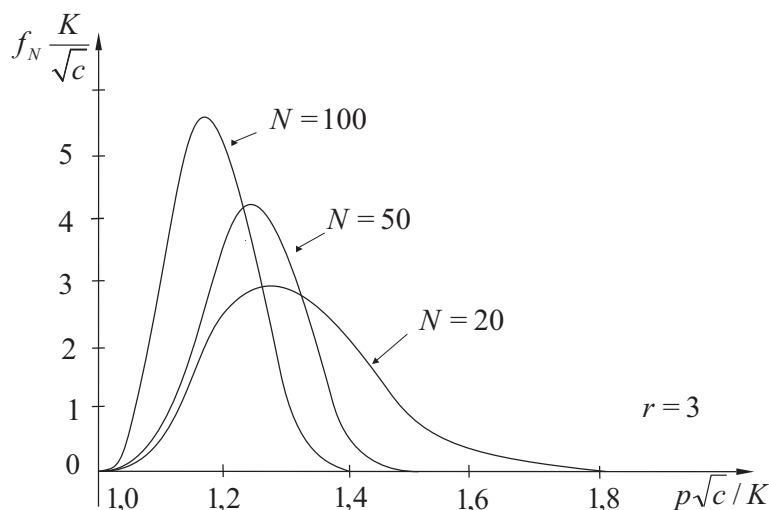


Рис. 2. Густина розподілу ймовірностей граничного навантаження за двовісного симетричного розтягу для пластин різних розмірів

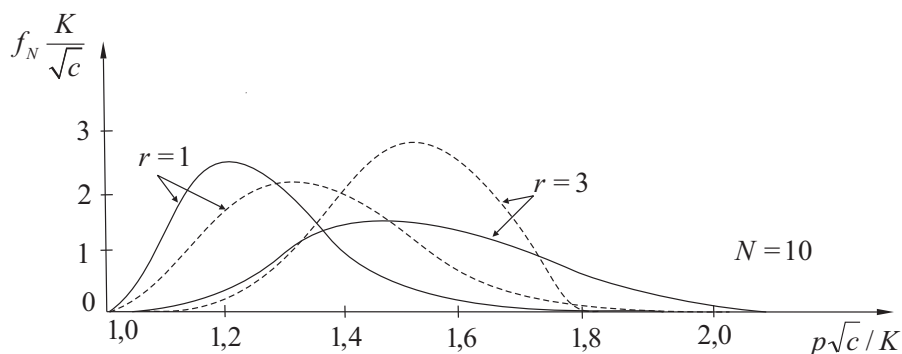


Рис. 3. Густина розподілу ймовірностей граничного навантаження за одновісного розтягу для різної неоднорідності матеріалу

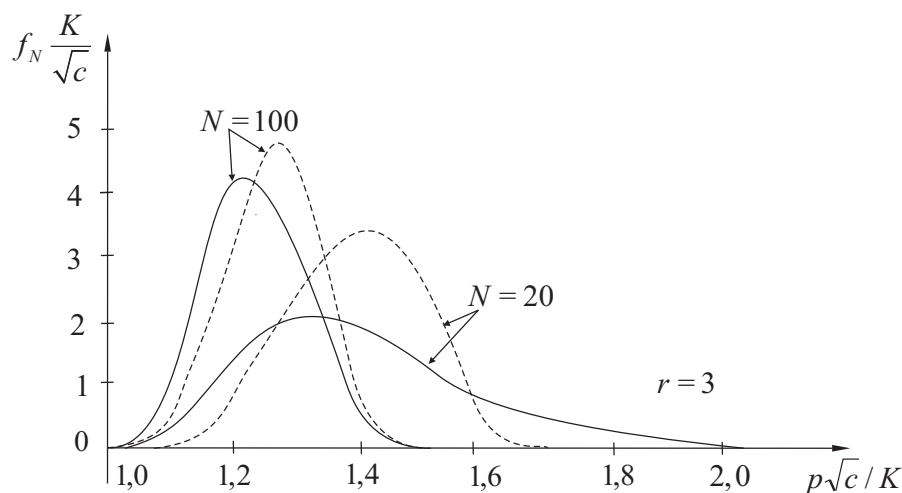


Рис. 4. Густина розподілу ймовірностей граничного навантаження за одновісного розтягу для пластин різних розмірів

На рис. 1 розглянуто вплив неоднорідності матеріалу (параметра r , зі збільшенням якого зростає ймовірність появи малих тріщин) на найімовірніше значення міцності (моду $\text{Mo}(p\sqrt{c}/K)$). У разі підвищення однорідності матеріалу (збільшення величини r) спостерігаємо збільшення найімовірнішого значення міцності. Параметр r характеризує форму кривої розподілу. Найбільша ордината кривої розподілу обернено пропорційна r ; при збільшенні r максимальна ордината зменшується.

На рис. 2 проявляється закономірність зменшення найімовірнішого значення міцності зі зростанням кількості дефектів N (тобто зі збільшенням площі пластини за однакової щільності тріщин).

На рис. 3 показано вплив врахування початкового напрямку поширення тріщин за одновісного розтягу для пластин різної неоднорідності. Штрихові лінії відповідають випадку поширення тріщин у своїх площинах ($\theta_* = 0$), а суцільні – випадку врахування початкового напрямку поширення дефектів. Це врахування ($\theta_* \neq 0$) зумовлює зменшення найімовірнішого значення міцності, причому величина зменшення не залежить від підвищення однорідності мате-

ріалу. Зауважена закономірність зберігається зі зростанням кількості тріщин N у пластині (збільшенням її розмірів) (рис. 4). У разі лінійно спадного розподілу довжин тріщин ($r = 1$), врахування початкового напрямку їх поширення спричиняє збільшення максимальної ординати кривої розподілу. При $r \geq 2$ та $\theta_* \neq 0$ спостерігаємо її зменшення, яке зберігається зі зміною кількості дефектів N у пластині (рис. 4).

III. Критерій руйнування пластин

Запишемо співвідношення, які визначають середнє значення граничного навантаження $\langle p \rangle$ для пластини з N дефектами. Відповідно до [9]

$$\langle p \rangle = p_{\min}(\eta) + \int_{p_{\min}(\eta)}^{p_{\max}(\eta)} [1 - F_1(p, \eta)]^N dp. \quad (10)$$

Підставимо вирази (1)–(4) для функції розподілу граничного навантаження $F_1(p, \eta)$ у формулу (10) та зробимо заміну змінних $x = \frac{K^2}{p^2 c}$. Отримаємо:

1) для випадку $0 \leq \eta \leq 1$ ($p > 0, q \geq 0$)

$$\langle p \rangle \frac{\sqrt{c}}{K} = 1 + \frac{1}{2} \int_0^{\eta^2} \frac{[1 - \Psi_2(x, \eta)]^n}{x^{3/2}} dx + \frac{1}{2} \int_{\eta^2}^1 \frac{[1 - \Psi_1(x, \eta)]^n}{x^{3/2}} dx ; \quad (11)$$

2) для випадку $-1 \leq \eta < 0$ ($p > 0, q < 0$)

$$\langle p \rangle \frac{\sqrt{c}}{K} = \frac{0,125\sqrt{3}}{\sqrt{|\eta|}} + \frac{1}{2} \int_0^{\varphi_1^{-2}(\pi/3, \eta)} \frac{[1 - \Psi_4(x, \eta)]^n}{x^{3/2}} dx + \frac{1}{2} \int_{\varphi_1^{-2}(\pi/3, \eta)}^{\frac{64}{3}|\eta|} \frac{[1 - \Psi_3(x, \eta)]^n}{x^{3/2}} dx ; \quad (12)$$

3) для випадку $-(\rho + \sqrt{1 + \rho^2})^2 \leq \eta < -1$ ($p \geq 0, q < 0$)

$$\langle p \rangle \frac{\sqrt{c}}{K} = \frac{0,125\sqrt{3}}{\sqrt{|\eta|}} + \frac{1}{2} \int_0^{\varphi_1^{-2}(\alpha_0, \eta)} \frac{[1 - \Psi_5(x, \eta)]^n}{x^{3/2}} dx + \frac{1}{2} \int_{\varphi_1^{-2}(\alpha_0, \eta)}^{\frac{64}{3}|\eta|} \frac{[1 - \Psi_3(x, \eta)]^n}{x^{3/2}} dx ; \quad (13)$$

4) для випадку $-\infty < \eta \leq -(\rho + \sqrt{1 + \rho^2})^2$ ($p \geq 0, q < 0$)

$$\langle p \rangle \frac{\sqrt{c}}{K} = p_0 + \frac{1}{2} \int_0^{\varphi_1^{-2}(\alpha_0, \eta)} \frac{[1 - \Psi_5(x, \eta)]^n}{x^{3/2}} dx + \frac{1}{2} \int_{\varphi_1^{-2}(\alpha_0, \eta)}^{\frac{64}{3}|\eta|} \frac{[1 - \Psi_3(x, \eta)]^n}{x^{3/2}} dx + \frac{1}{2} \int_{\frac{64}{3}|\eta|}^{p_0^{-2}} \frac{[1 - \Psi_6(x, \eta)]^n}{x^{3/2}} dx, \quad (14)$$

де $p_0 = 0,25\sqrt{3}[(1 - \eta)\sqrt{1 + \rho^2} + \rho(1 + \eta)]^{-1}$.

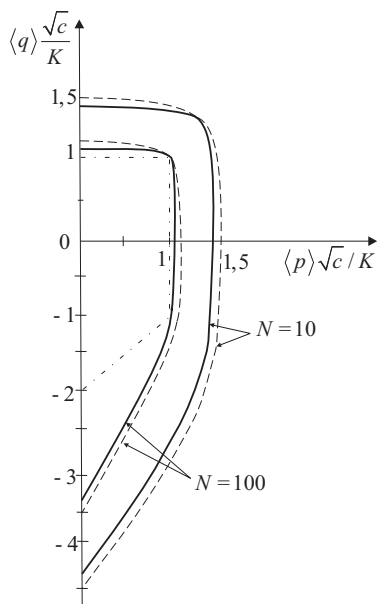


Рис. 5. Діаграми граничного стану

Обчисливши величини $\langle p \rangle \frac{\sqrt{c}}{K}$ за формулами (11)–(14), середні значення другої компоненти безвимірного навантаження $\langle q \rangle \frac{\sqrt{c}}{K}$ отримаємо зі співвідношення $\langle q \rangle = \eta \langle p \rangle$.

Сукупність значень $\langle p \rangle \frac{\sqrt{c}}{K}$ та $\langle q \rangle \frac{\sqrt{c}}{K}$ визначають діаграми граничного стану (криві міцності за скла-

дного напруженого стану). Такі криві для випадку лінійно спадного розподілу довжин тріщин (9) зображені на рис. 5. Оскільки орієнтацію тріщин описуємо рівномірним розподілом [7], то вказані діаграми симетричні відносно прямої $\langle p \rangle = \langle q \rangle$. Штрихові лінії відповідають випадку поширення тріщин у своїх площинах ($\theta_* = 0$) [9], а суцільні – випадку врахування початкових напрямків поширення тріщин. За двовісного симетричного розтягу вони співпадають. Штрих-пунктирною лінією зображені детерміністичні криві граничного стану $\langle p \rangle \rightarrow p_{min}, \langle q \rangle \rightarrow q_{min}$.

IV. Висновки

З аналізу побудованих на рис. 1–4 графіків густини розподілу ймовірностей граничного навантаження випливає, що за двовісного симетричного розтягу найімовірніше значення міцності є меншим, ніж за одновісного. Врахування початкового напрямку поширення тріщин (рис. 3–4) істотно впливає на міцність, незалежно від кількості дефектів у пластині, неоднорідності матеріалу та виду напруженого стану.

З діаграм граничного стану на рис. 5 видно, що за однакової кількості дефектів, врахування початкового напрямку поширення тріщин спричиняє зменшення середніх значень граничного навантаження. Це зменшення у деяких випадках є однаковим для різних видів напруженого стану (для різних η).

Отже, можна стверджувати, що вдосконалення

визначаючих співвідношень, які зв'язують міцність матеріалу зі стохастичністю його структури, за допомогою залучення детерміністичного критерію руйну-

вання [8], дає змогу підвищити надійність і достовірність розрахунків та здійснити побудову адекватної математичної моделі крихкого руйнування.

Література

- [1] Duckett W. Risk analysis and acceptable probability of failure // *Struct. Eng.* – 2005. – № 15. – P.25–26.
- [2] Власов Н.М., Федик И.И. Вероятностные модели разрушения хрупких материалов // *Обозр. прикл. и пром. тематики.* – 2007. – Т. 14, № 3. – С.521–522.
- [3] Strnadel B., Hausild P. Statistical scatter in the fracture toughness and charpy impact energy of pearlitic steel // *Mater. Sci. and Eng.:A.* – 2008. – Vol. 486, № 1–2. – P.208–214.
- [4] Малкин А.И., Куликов-Костюшко Ф.А., Шумихин Т.А. Статистическая кинетика квазихрупкого разрушения // *Журн. техн. физики.* – 2008. – Т. 78, № 3. – С.48–56.
- [5] Bazant Z.P. Mechanics based statistical prediction of structure size and geometry effects on safety factors for composites and other quasibrittle materials // *Theor. Appl. Mech.* – 2008. – Vol. 35, № 1–3. – P.53–71.
- [6] Bazant Z.P., J.-L. Le, Bazant M.Z. Scaling of strength and lifetime probability distributions of quasibrittle structures based on atomistic fracture mechanics // *Proc. of the Nat. Ac. of Sci.* – 2009. – Vol. 106, № 28. – P.11484–11489.
- [7] Квіт Р.І. Стохастичне моделювання руйнування крихких матеріалів // *Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка": Фіз.-мат. науки.* – 2009. – № 660. – С.61–67.
- [8] Панасюк В.В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1968. – 246 с.
- [9] Витвицкий П.М., Попина С.Ю. Прочность и критерии хрупкого разрушения стохастически дефектных тел. – К.: Наук. думка, 1980. – 186 с.
- [10] Хан Г., Шапиро С. Статистические модели в инженерных задачах. – М.: Мир, 1969. – 395 с.

ВЕРОЯТНОСТНАЯ ОЦЕНКА ПРОЧНОСТИ ХРУПКИХ МАТЕРИАЛОВ

Р.И. Квит

*Национальный университет "Львовська політехніка",
ул. С. Бандеры, 12, Львов, 79013, Украина*

Проведено оцінку прочності ізотропної пластини, що містить стохастично розподілені тріщини обмеженої довжини, з використанням детерміністичного критерію руйнування, який враховує початкове напрямлення розвитку тріщини. Виведено співвідношення для густоти розподілення ймовірностей предельної навантаження пластини з заданою дефектністю при різних видах напруженого стану. Побудовано діаграми предельного стану, які відповідають середнім значенням руйнуючої навантаження. Досліджено вплив на прочність структурної неоднорідності матеріалу, площі пластини і характеру напруженого стану.

Ключевые слова: критерий прочности, изотропная пластина с трещиной, разрушающая нагрузка.

2000 MSC: 82B31

УДК: 539.4

A PROBABILISTIC EVALUATION OF BRITTLE MATERIALS STRENGTH

R.I. Kvit

*National University "Lvivska Politechnika"
12 S. Bandera Str., 79013, Lviv, Ukraine*

In this paper the strength estimation of isotropic plate contains stochastic distribute bound length cracks, with using of deterministic failure criterion, which account the initial direction of crack propagation, is realized. The relations for density of plate limiting loading with given presence of defects probabilistic distribution under different form of stressed state are derived. The limiting state diagrams, which accommodate failure load mean, are carrying out. The influence of structure inhomogeneous, plate area and character of stressed state on strength is investigated.

Key words: strength criterion, isotropic plate with crack, failure load.

2000 MSC: 82B31

УДК: 539.4