ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
Вип.696 № 696, (2011) с. 75–80

JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY
"LVIVSKA POLITECHNIKA"
"Physical & mathematical sciences"
Vol.696 No 696, (2011) 75–80

ПРО АСИМПТОТИЧНУ ПОВЕДІНКУ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ З МАРКОВСЬКИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Т.О. Лукашів[a], Я.М. Чабанюк[b], В.К. Ясинський[a]

[a] *Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича*
(58034, Чернівці, вул. Коцюбинського 2)
[b] *Національний університет "Львівська політехніка"*
вул. С. Бандери 12, 79013, Львів, Україна

(Отримано 2 листопада 2010 р.)

Використано апарат функціоналів Ляпунова-Красовського для дослідження асимптотичної стохастичної стійкості загалом, асимптотичної стійкості в середньому квадратичному загалом сильного розв'язку дифузійних стохастичних диференціально-функціональних рівнянь з урахуванням внутрішніх марковських параметрів і зовнішніх перемикань типу ланцюга Маркова.

Ключові слова: стохастичні диференціально-різницеві рівняння, марковські перемикання, функціонал Ляпунова-Красовського.

2000 MSC: 60J10, 60J27, 60H10, 68U20

УДК: 519.217; 519.718

Вступ

Дослідження стійкості ймовірнісних систем у різних постановках започатковані в працях [1–4]. У працях [5; 6] вперше був запропонований оригінальний підхід до задач стійкості систем з випадковими параметрами, який дозволив використовувати для стохастичних диференціальних рівнянь (СДР) основні результати класичної теорії стійкості, в результаті чого вдалося встановити характерні властивості ймовірнісних систем. Серед основних дослідників у цьому напрямку можна виокремити таких видатних математиків: Р.З. Хасьмінський, В.С. Королюк, Й.І. Гіхман, А.В. Скороход, Г.Дж. Кушнер, В.М. Константинов, В.В. Калашников, Є.Ф. Царков.

У згаданих роботах розглядалася, в основному, стійкість випадкових процесів з неперервними фазовими траєкторіями, як розв'язок СДР Іто, або випадкових процесів, які мають скінченні стрибки і описуються узагальненими стохастичними рівняннями Іто-Скорохода. Монографія І.Я. Каца [6] присвячена розгляду стохастичних рівнянь з марковськими параметрами, так званих рівнянь з випадковою структурою, які дозволяють розглядати стійкість систем з розривними фазовими траєкторіями. Монографія Є.Ф. Царкова та М.Л. Свердана [7] присвячена дослідженню стійкості детермінованих різницевих і динамічних систем з урахуванням марковських параметрів та імпульсних марковських перемикань. У працях [8; 9], які узагальнюють результати [6, 7], розглянуто стохастичне дифузійне рівняння з урахуванням марковських параметрів, які обумовлюють внутрішню зміну структури системи із збереженням властивості стохастичної неперервності реалізації за І.Я. Кацом, а також враховуються зовнішні марковські перемикання за Є.Ф. Царковим.

У цій праці узагальнено результати [8] на випадок систем стохастичних диференціально-різницевих рівнянь з марковськими параметрами та із зовнішніми марковськими перемиканнями.

I. Постановка задачі

На ймовірнісному базисі $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{F} \equiv \{\mathfrak{F}_t \subset \mathfrak{F}, t \geq 0\}, \mathbf{P})$ [10] розглянемо дифузійне стохастичне диференціально-різницеве рівняння (СДРР)

$$dx(t) = a(t, \xi(t), x(t), x(t-r))dt+$$
$$+b(t, \xi(t), x(t), x(t-r))dw(t), \quad (1)$$

із зовнішніми марковськими перемиканнями

$$\Delta x(t)|_{t=t_k} = g(t_k-, \xi(t_k-), \eta_k, x(t_k-)),$$
$$t_k \in S \equiv \{t_n, n \in \mathbb{N}\}, \lim_{n\to\infty} t_n = +\infty, \quad (2)$$

і з початковими умовами

$$x(t)|_{t_0-r\leq t\leq t_0} = \varphi(\theta) \in \mathbb{D} \equiv \mathbb{D}([t_0-r, t_0], \mathbb{R}^m),$$
$$\xi(t_0) = y \in \mathbf{Y}, \quad \eta_{k_0} = h \in \mathbf{H}. \quad (3)$$

Тут $\xi(t)$ – марковський процес із значеннями в метричному просторі $\mathbf{Y}$ з перехідною ймовірністю $\mathbf{P}(s, y, t)$; $(\eta_k, k \geq 0)$ – ланцюг Маркова із значеннями в метричному просторі $\mathbf{H}$ з перехідною ймовірністю на k-му кроці $\mathbf{P}_k(h, G)$; $\theta \in [t_0 - r, t_0]$, $r > 0$; $w(t)$ – одновимірний стандартний вінерів процес [11], $\mathbb{D}$ – простір Скорохода неперервних справа функцій, що мають лівосторонні границі [12].

Припустимо, що вимірні за сукупністю змінних відображення a: $\mathbb{R}_+ \times \mathbf{Y} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$; b:

$\mathbb{R}_+ \times \mathbf{Y} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, g: $\mathbb{R}_+ \times \mathbf{Y} \times \mathbf{H} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ задовольняють умову Ліпшиця

$$|a(t,y,\varphi_1,\varphi_2) - a(t,y,\psi_1,\psi_2)|^2 +$$
$$+|b(t,y,\varphi_1,\varphi_2) - b(t,y,\psi_1,\psi_2)|^2 +$$
$$+|g(t,y,h,\varphi_3) - g(t,y,h,\psi_3)|^2 \leq$$
$$\leq L(|\varphi_1-\psi_1|^2 + |\varphi_2-\psi_2|^2 + |\varphi_3-\psi_3|^2), \quad (4)$$
$$L>0, \{\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\psi_1,\psi_2,\psi_3\} \subset \mathbb{D},$$

при $\forall t \geq 0$, $y \in \mathbf{Y}$, $h \in \mathbf{H}$, й умову

$$|a(t,y,0,0)| + |b(t,y,0,0)| + |g(t,y,h,0)| = c < \infty. \quad (5)$$

Норма в просторі Скорохода $\mathbb{D}$ визначається рівністю

$$\|\varphi\| = \sup_{t_0-r\leq\theta\leq t_0} |\varphi(\theta)|. \quad (6)$$

Зауваження 1. Простір Скорохода $\mathbb{D}$ не є повним відносно (6), тому будемо працювати у розширеному просторі Скорохода $\bar{\mathbb{D}}$, який містить всі границі фундаментальних послідовностей [12]. Надалі $\mathbb{D}$ розумітимемо як розширений простір $\bar{\mathbb{D}}$.

Вказані умови щодо a, b і g гарантують існування сильного розв'язку задачі (1) – (3) з точністю до стохастичної еквівалентності за будь-яких $t_0 \geq 0$, $\varphi \in \mathbb{D}$ і заданих реалізацій марковського процесу $\{\xi(t), t \geq t_0\} \in \mathbf{Y}$ і ланцюга Маркова $(\eta_k, k \geq k_0)$ [12].

II. Основні означення

Випадкові зміни структури параметра $\xi(t) \in \mathbf{Y}$ в дифузійному стохастичному диференціальному рівнянні (1), як правило, враховуватимемо одним із таких способів [6, 7].

I. Нехай $\xi(t) \in \mathbf{Y}$ – суто розривний скалярний марковський процес, умовна ймовірність якого допускає розклад [11]

$$\mathbf{P}\{\xi(t+\Delta t) \in [\beta, \beta+\Delta\beta]/\xi(t) = \alpha \neq \beta\} =$$
$$= p(t,\alpha,\beta)\Delta\beta\Delta t + o(\Delta t),$$
$$\mathbf{P}\{\xi(\tau) = \alpha, t < \tau < t+\Delta t/\xi(t) = \alpha\} =$$
$$= 1 - p(t,\alpha)\Delta t + o(\Delta t),$$

де $P\{\cdot/\cdot\}$) – умовна ймовірність; $o(\Delta t)$ – нескінченно мала величина вищого порядку малості відносно Δt. Зазначимо, що за умови регулярності майже всі реалізації є кусково-сталими неперервними справа функціями.

II. Скалярний процес $\xi(t)$ – однорідний марковський ланцюг зі скінченним числом станів $\mathbf{Y} \equiv \{y_1, y_2, ..., y_k\}$ і відомими параметрами q_{ij} за умови $q_i = \sum_{j\neq i} q_{ij}, i,j = \overline{1,k}$. При цьому умовні ймовірності допускають розклад

$$\mathbf{P}\{\xi(t+\Delta t) = y_i/\xi(t) = y_j\} = q_{ij}\Delta t + o(\Delta t),$$

$$\mathbf{P}\{\xi(\tau) = y_i, t<\tau<t+\Delta t/\xi(t) = y_i\} = 1 - q_i\Delta t + o(\Delta t).$$

III. У момент τ зміни структури системи $y_i \to y_j$ відбувається випадкова стрибкоподібна зміна фазового вектора $x(\tau-0) = x, x(\tau) = z$, для якого задана умовна щільність $\mathbf{P}_{ij}(\tau, z)$, а саме:

$$\mathbf{P}\{x(\tau) \in [z, z+dz]/\xi(t-0) = x\} = p_{ij}(\tau, z/x)dz + o(dz).$$

Позначимо через $\mathbf{P}_k((y,h), \Gamma\times G)$ перехідну ймовірність ланцюга Маркова $(\xi(t_k), \eta_k)$ на k-му кроці. Відповідно до прийнятих в теорії ймовірностей позначень [11; 12; 13] (зв'язаних із цим ланцюгом) введемо індекси так, щоб виконувались рівності

$$\mathbf{P}^{t_k}_{y,h}(\xi(t_{k+1}) \in \Gamma, \eta_{k+1} \in G) \equiv \mathbf{P}_k((y,h), \Gamma\times G)$$

при всіх $t_k \geq t_0, y \in \mathbf{Y}, h \in \mathbf{H}$ і борелевих $\Gamma \in \mathbf{Y}$ та $G \in \mathbf{H}$.

Тепер введемо функцію

$$\mathbf{P}_k((y,h,\varphi), \Gamma\times G\times C) \equiv \mathbf{P}^{t_k}_{y,h}(x(t_k,\varphi,y,h) \in C,$$
$$\xi(t_{k+1}) \in \Gamma, \eta_{k+1} \in G)$$

при всіх $t_k \in S\cup\{t_0\}, k \in \mathbb{N}\cup\{0\}, \varphi \in \mathbb{D}, y \in \mathbf{Y}, h \in \mathbf{H}$ і борелевих $C \subset \mathbb{D}, \Gamma \subset \mathbf{Y}, G \in \mathbf{H}$.

Означення 1. Дискретний оператор Ляпунова $(l\nu_k)(y,h,\varphi)$ на послідовності вимірних скалярних функцій $\nu_k(y,h,\varphi) : \mathbf{Y}\times\mathbf{H}\times\mathbb{D} \to \mathbf{R}^1, k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, для СДРР (1) із зовнішніми марковськими перемиканнями (2) визначаємо рівністю [11]

$$l\nu_k(y,h,\varphi) \equiv \int\limits_{\mathbf{Y}\times\mathbf{H}\times\mathbb{D}} \mathbf{P}_k(y,h,\varphi)(du\times dz\times dl)\cdot$$
$$\cdot v_{k+1}(u,z,l) - v_k(y,h,\varphi). \quad (7)$$

Означення 2. Функціоналом Ляпунова-Красовського для системи випадкової структури (1) – (3) назвемо послідовність невід'ємних функцій $\{\nu_k(y,h,\varphi), k \geq 0\}$ таких, що виконуються умови:

1) при всіх $k \geq 0, y \in \mathbf{Y}, h \in \mathbf{H}, \varphi \in \mathbb{D}$ визначено дискретний оператор Ляпунова $(l\nu_k)(y,h,\varphi)$ (7);

2) при $r \to +\infty$

$$\underline{\nu}(r) \equiv \inf_{\substack{k\in\mathbb{N}, y\in\mathbf{Y}\\ h\in\mathbf{H}, ||\varphi||\geq r}} \nu_k(y,h,\varphi) \to +\infty; \quad (8)$$

3) при $r \to 0$

$$\bar{\nu}(r) \equiv \sup_{\substack{k\in\mathbb{N}, y\in\mathbf{Y}\\ h\in\mathbf{H}, ||\varphi||\leq r}} \nu_k(y,h,\varphi) \to 0; \quad (9)$$

причому $\bar{\nu}(r)$ і $\underline{\nu}(r)$ неперервні і монотонні.

Розглядатимемо стійкість тривіального розв'язку $x \equiv 0$ системи (1) – (3), тобто виконання (5) при $c = 0$.

Оскільки сильний розв'язок $x(t) \equiv x(t,\omega) \in \mathbf{R}^m$ СДРР (1) одночасно визначається за допомогою початкових даних $x(t)|_{t\in[t_0-r,t_0]} = \varphi$, $\xi(t_0) = y$, $\eta_{k_0} = h$, то надалі його позначатимемо $x(t_0,y,h,\varphi) \equiv x(t_0 - r, t_0, y, h, \varphi)$, $r > 0$.

Означення 3. Систему випадкової структури (1) – (3) назвемо:

– стійкою за ймовірністю загалом, якщо для $\forall\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$ можна вказати таке $\delta > 0$, що з нерівності $||\varphi|| < \delta$ випливає нерівність

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t\geq t_0} ||x(t_0, y, h, \varphi)|| > \varepsilon_1\right\} < \varepsilon_2$$

при всіх $y \in \mathbf{Y}, h \in \mathbf{H}, \varphi \in \mathbb{D}$ і $t_0 \geq 0$;

– асимптотично стохастично стійкою загалом, якщо вона стійка за ймовірністю і для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta_1 > 0$ таке, що

$$\lim_{T\to\infty} \mathbf{P}\left\{\sup_{t\geq t_0} ||x(t_0, y, h, \varphi)|| > \varepsilon\right\} = 0$$

при всіх $\|\varphi\| < \delta_1, y \in \mathbf{Y}, h \in \mathbf{H}, \varphi \in \mathbb{D}$ і $T \geq t_0 \geq 0$;

– p-стійкою (при деякому $p > 0$) загалом, якщо для $\forall\varepsilon > 0$ можна вказати таке $\delta_2 > 0$, що з нерівності $\|\varphi\| < \delta_2$ випливає нерівність

$$\mathbf{E}\{\|x(t_0, y, h, \varphi)\|^p\} < \varepsilon$$

при всіх $t > t_0, t_0 \geq 0, y \in \mathbf{Y}, h \in \mathbf{H}, \varphi \in \mathbf{D}$

– асимптотично p-стійкою (при деякому $p > 0$) загалом, якщо вона p-стійка та існує таке $\delta_1 > 0$, що з нерівності $\|\varphi\| < \delta_1$ випливає

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{y\in\mathbf{Y}, h\in\mathbf{H}} \mathbf{E}\left\{\|x(t_0, y, h, \varphi)\|^p\right\} = 0$$

при всіх $t_0 \geq 0$.

Якщо $p = 2$, то матимемо стійкість в середньому квадратичному ($l.i.m$) загалом та асимптотичну стійкість в $l.i.m.$ загалом.

III. Стійкість систем стохастичних диференціально-різницевих рівнянь з марковськими параметрами та зовнішніми марковськими перемиканнями

Встановимо достатні умови стійкості тривіального розв'язку систем стохастичних диференціально-різницевих рівнянь з марковськими параметрами та зовнішніми перемиканнями типу ланцюга Маркова.

Для подальших викладень використовуватимемо оцінку розв'язку задачі (1) – (3) на інтервалах $[t_k, t_{k+1})$ [14].

Лема 1. *У разі виконання умов (4), (5) при всіх $k \geq 0$ для сильного розв'язку задачі Коші (1), (3) має місце нерівність*

$$\mathbf{E}\left\{\sup_{t_k\leq t\leq t_{k+1}} \|x(t)\|^2\right\} \leq 15(1+4L)e^{5L(1+4L)(t_{k+1}-t_k)^2}\cdot$$
$$\cdot(\mathbf{E}\left\{x^2(t_k)\right\} + 2c^2(t_{k+1} - t_k)). \quad (10)$$

Зауваження 1. В подальшому вважатимемо, що $c = 0$ в (10), а також

$$k_0 = \begin{cases} \sup\{k \in \mathbb{N} : t_k \leq t_0\} & \text{для } t_0 \geq t_1, \\ 0 & \text{при } t \in [0, t_1). \end{cases}$$

Теорема 1. *Нехай:*

1) $0 < |t_{k+1} - t_k| \leq \Delta, k \geq 0, \Delta > 0$;

2) виконується умова Ліпшиця (4);

3) існують послідовності функціоналів Ляпунова-Красовського $\nu_k(y, h, \varphi)$ і $a_k(y, h, \varphi)$, $k \geq 0$ такі, що на підставі системи правильна нерівність

$$l\nu_k(y, h, \varphi) \leq -a_k(y, h, \varphi). \quad (11)$$

Тоді сильний розв'язок системи випадкової структури (1), (3) із зовнішніми перемиканнямии типу ланцюга Маркова (2) асимптотично стохастично стійкий загалом.

$\square$ *Доведення.* Позначимо через $\mathfrak{F}_{t_k}$ – мінімальну σ-алгебру, відносно якої вимірні $\xi(t)$ при всіх $t \in [t_0, t_k]$ і η_n при $n \leq k$. Тоді умовне математичне сподівання можна обчислити за формулою [11]

$$\mathbf{E}\{\nu_{k+1}(\xi(t_{k+1}), \eta_{k+1}, x(t_{k+1}))/\mathfrak{F}_{t_k}\} =$$
$$= \int\limits_{Y\times H\times\mathbb{D}} \mathbf{P_k}(y, h, \varphi)(du \times dz \times dl)\cdot$$
$$\cdot\nu_{k+1}(u, z, l)\Bigg|_{\substack{y=\xi(t_k)\\ h=\eta_k\\ \varphi=x(t_k)|_{t_k-r\leq t\leq t_k}}} . \quad (12)$$

Тут $v_{k+1}(\xi(t_{k+1}), \eta_{k+1}, x(t_{k+1}))$ означає, що розглядається функціонал Ляпунова-Красовського $v_k(y, h, \varphi)$ для інтервала $[t_k, t_{k+1})$.

У цьому разі за означенням дискретного оператора Ляпунова $(l\nu_k)(y, h, \varphi)$ з рівності (12) одержимо, враховуючи (11), нерівність

$$\mathbf{E}\{\nu_{k+1}(\xi(t_{k+1}), \eta_{k+1}, x(t_{k+1}))/\mathfrak{F}_{t_k}\} =$$
$$= \nu_k(\xi(t_k), \eta_k, x(t_k)) +$$
$$+(l\nu_k)(\xi(t_k), \eta_k, x(t_k)) \leq \overline{\nu}(\|x(t_k)\|). \quad (13)$$

З нерівності (10) (за нерівністю Ляпунова для моментів [10] з існування другого моменту випливає існування першого моменту) і властивостей функції $\overline{\nu}$ випливає існування умовного математичного сподівання лівої частини нерівності (13).

Тепер, на основі (12), запишемо дискретний оператор Ляпунова $(l\nu_k)(\xi(t_k), \eta_k, x(t_k))$ вздовж розв'язків (1) – (3).

$$(l\nu_k)(\xi(t_k), \eta_k, x(t_k)) =$$
$$= \mathbf{E}\{\nu_{k+1}(\xi(t_{k+1}), \eta_{k+1}, x(t_{k+1}))/\mathfrak{F}_{t_k}\} -$$
$$-\nu_k(\xi(t_k), \eta_k, x(t_k)) \leq -a_k(\xi(t_k), \eta_k, x(t_k)) \leq 0. \quad (14)$$

Тоді при $k \geq 0$ виконується нерівність

$$\mathbf{E}\{\nu_{k+1}(\xi(t_{k+1}), \eta_{k+1}, x(t_{k+1}))/\mathfrak{F}_{t_k}\} \leq$$

$$\leq \nu_k(\xi(t_k), \eta_k, x(t_k)).$$

Тоді, за означенням супермартингала [10], послідовність випадкових величин $\{\nu_k(\xi(t_k), \eta_k, x(t_k))\}$ при $k \in \mathbb{N}$ утворює супермартингал відносно $\mathfrak{F}_{t_k}$ [7].

Потім взявши математичне сподівання від обох частин нерівності (14), і, підсумувавши за k від $n \geq k_0$ до N, одержимо

$$\mathbf{E}\{\nu_{N+1}(\xi(t_{N+1}), \eta_{N+1}, x(t_{N+1}))\} -$$

$$-\mathbf{E}\{\nu_n(\xi(t_n), \eta_n, x(t_n))\} =$$

$$= \sum_{k=n}^{N} \mathbf{E}\{l\nu_k(\xi(t_k), \eta_k, x(t_k))\}$$

$$\leq -\sum_{k=n}^{N} \mathbf{E}\{a_k(\xi(t_k), \eta_k, x(t_k))\} \leq 0. \qquad (15)$$

Маємо

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t \geq t_0} ||x(t_0, y, h, \varphi)|| > \varepsilon_1\right\} =$$

$$= \mathbf{P}\left\{\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{t_{k_0+n-1} \leq t \leq t_{k_0+n}} ||x(t_0, y, h, \varphi)|| > \varepsilon_1\right\} \leq$$

$$\leq \mathbf{P}\left\{\sup_{n \in \mathbb{N}} \|x(t_{k_0+n-1}, t_0, y, h, \varphi)\| > \varepsilon_1\right\} \leq \qquad (16)$$

$$\leq \mathbf{P}\Big\{\sup_{n \in \mathbb{N}} \nu_{k_0+n-1}(\xi(t_{k_0+n-1}), \eta_{k_0+n-1}, x(t_{k_0+n-1})) \geq$$

$$\geq \overline{\nu}(\varepsilon_1)\Big\}, \forall \varepsilon_1 > 0.$$

Дійсно, якщо $\sup ||x(t_k)|| \geq r$, то на основі (8) виконується нерівність

$$\sup_{k \geq k_0} \nu_k(\xi(t_k), \eta_k, x(t_k)) \geq \inf_{\substack{k \geq k_0, y \in \mathbf{Y} \\ h \in \mathbf{H}, |x| \geq r}} \nu_k(y, h, \varphi) = \overline{\nu}(r).$$

Тепер скористаємося відомою нерівністю для невід'ємних супермартингалів [10] для оцінювання правої частини (16):

$$\mathbf{P}\Big\{\sup_{n \in \mathbb{N}} \nu_{k_0+n-1}(\xi(t_{k_0+n-1}), \eta_{k_0+n-1}, x(t_{k_0+n-1})) \geq$$

$$\geq \overline{\nu}(\varepsilon_1)\Big\} \leq \frac{1}{\overline{\nu}(\varepsilon_1)} \nu_{k_0}(y, h, \varphi) \frac{\overline{\nu}(||\varphi||)}{\overline{\nu}(\varepsilon_1)}. \qquad (17)$$

Враховуючи нерівність (16), нерівність (17) дає можливість гарантувати виконання нерівності

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t \geq t_0} ||x(t_0, y, h, \varphi)|| > \varepsilon_1\right\} < \varepsilon_2, \forall \varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0,$$

а це означає, що система (1)–(3) стійка за ймовірністю загалом.

З нерівності (15) випливає оцінка

$$\mathbf{E}\{\nu_{N+1}(\xi(t_{N+1}), \eta_{N+1}, x(t_{N+1}))\} \leq \nu_{k_0}(y, h, \varphi) -$$

$$-\sum_{k=k_0}^{N} \mathbf{E}\{a_k(\xi(t_k), \eta_k, x(t_k))\} \leq \nu_{k_0}(y, h, \varphi). \qquad (18)$$

при всіх $N \geq k_0, y \in \mathbf{Y}, h \in \mathbf{H}, \varphi \in \mathbb{D}$.

На підставі того, що послідовність $\{a_k\}, k \geq 0$, є функціоналами Ляпунова-Красовського, існують неперервні строго монотонні функції $\underline{a}(r)$ і $\overline{a}(r)$, такі, що

$$\overline{a}(||\varphi||) \leq a_k(y, h, \varphi) \leq \underline{a}(||\varphi||),$$

для $\forall k \in \mathbb{N}, y \in \mathbf{Y}, h \in \mathbf{H}, \varphi \in \mathbb{D}, \underline{a}(0) = \overline{a}(0) = 0$.

Отже, із збіжності ряду у (18) випливає збіжність ряду

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \mathbf{E}\{a_k(\|x(t_k, t_0, y, h, \varphi)\|)\}$$

для

$$\forall t_0 \geq 0, y \in \mathbf{Y}, h \in \mathbf{H}, \varphi \in \mathbb{D}.$$

Тоді в силу неперервності $\underline{a}(r)$ і рівності $\underline{a}(0) = 0$ матимемо

$$\lim_{k \to \infty} \|x(t_k, t_0, y, h, \varphi)\| = 0. \qquad (19)$$

З (19) випливає прямування до нуля за ймовірністю послідовності $\overline{\nu}(\|x(t_k, t_0, y, h, \varphi)\|)$ при $k \to \infty$ для всіх $\forall t_0 \geq 0, y \in \mathbf{Y}, h \in \mathbf{H}, \varphi \in \mathbb{D}$.

Отже, з властивостей функціоналів Ляпунова–Красовського [7, 10] робимо висновок, що невід'ємний супермартингал $\nu_k(\xi(t_k), \eta_k, x(t_k))$ при $k \to \infty$ прямує до нуля за ймовірністю за всіх реалізацій процесу $\xi(t) \equiv \xi(t, \omega)$ і послідовності $\{\eta_k\}, k \leq 1$.

Далі, невід'ємний обмежений зверху супермартингал має границю з імовірністю одиниця [13]. Тоді, використовуючи (10), одержимо

$$\lim_{k \to \infty} \mathbf{P}\left\{\sup_{t \geq T} \|x(t_k, t_0, y, h, \varphi)\| > \varepsilon\right\} = 0,$$

при всіх $y \in \mathbf{Y}$, $h \in \mathbf{H}$, $\varphi \in \mathbf{D}$ і $T \geq t_0 \geq 0$, що означає, асимптотичну стохастичну стійкість загалом сильного розв'язку системи (1) – (3). Теорема 1 доведена. ■

Як наслідок теореми 1 випливає твердження.

Теорема 2. *Нехай:*

1) виконуються умови 1), 2) теореми 1;

2) на підставі системи (1)–(3) для послідовності функціоналів Ляпунова-Красовського $\{\nu_k, k \geq 0\}$ *виконується нерівність* $(l\nu_k)(y, h, \varphi) \leq 0$ *для* $\forall k \geq 0, y \in \mathbf{Y}, h \in \mathbf{H}, \varphi \in \mathbb{D}$.

Тоді динамічна система випадкової структури (1)–(3) стійка за ймовірністю загалом.

Теорема 3. *Нехай:*

1) виконуються умови 1) – 3) теореми 1;

2) функціонали Ляпунова-Красовського $\{\nu_k\}, \{a_k\}, k \geq 0$, задовольняють нерівності $\forall \varphi \in \mathbb{D}$:

$$c_1||\varphi||^2 \leq \nu_k(y, h, \varphi) \leq c_2||\varphi||^2, \qquad (20)$$

$$c_3||\varphi||^2 \leq a_k(y, h, \varphi) \leq c_4||\varphi||^2, \qquad (21)$$

при деяких $c_i > 0$, $i = \overline{1,4}$ для всіх $k \geq 0, y \in \mathbf{Y}, h \in \mathbf{H}, \varphi \in \mathbb{D}$.

Тоді система випадкової структури (1)-(3) асимптотично стійка в середньому квадратичному загалом.

□ *Доведення.* Використовуючи нерівність (14) для $n = k_0$, на основі (20) легко одержати нерівність

$$\mathbf{E}\{||x(t_{N+1})||\} \leq \frac{1}{c_1}\mathbf{E}\{\nu_{N+1}(\xi(t_{N+1})), \eta_{N+1}, x(t_{N+1})\} \leq$$

$$\leq \frac{1}{c_1}\{\nu_{k_0}(\xi(t_{k_0}), \eta_{k_0}, \varphi)\} \leq \frac{c_2}{c_1}||\varphi||^2.$$

для всіх $N \geq k$, $k_0 \in \mathbb{N}$, $\varphi \in \mathbb{D}$ і початкових розподілах вектора $\{\xi(t_{k_0}), \eta_{k_0}\}$. Тому, можна стверджувати, що виконується нерівність

$$\mathbf{E}\{||x(t_0, y, h, \varphi)||^2\} < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0,$$

а це означає, що система (1) – (3) стійка в середньому квадратичному. Далі, використовуючи нерівності (15), (20), (21), можемо одержати нерівність

$$\sum_{k=k_0}^{N} \mathbf{E}\{\|x(t_{N+1})\|^2\} \leq \frac{1}{c_3}\sum_{k=k_0}^{N} \mathbf{E}\{a_k(\xi(t_k), \eta_k, x(t_k)\} \leq$$

$$\leq \frac{1}{c_3}\mathbf{E}\{\nu_{k_0}(\xi(t_{k_0}), \eta_{k_0}, \varphi)\} \leq \frac{c_2}{c_3}||\varphi||^2.$$

Ця нерівність гарантує збіжність ряду, членами якого виступають $\mathbf{E}\{\|x(t_{N+1})\|^2\}$ для будь-яких початкових даних $x(t)|_{t_{k_0}-r\leq t_0\leq r_{k_0}} = \varphi$ і початкових розподілів випадкового вектора $\{(\xi(t_{k_0}), \eta_{k_0}\}$.

Отже,

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{y\in\mathbf{Y}, h\in\mathbf{H}} \mathbf{E}\{||x(t_k, t_0, y, h, \varphi)||^2\} = 0,$$

при всіх $t_0 \geq 0$, що і доводить теорему 3. ■

Наслідок 1. Якщо виконуються умови теореми 2 і виконується нерівність (20), тоді тривіальний розв'язок динамічної системи випадкової структури (1) – (3) стійкий в середньому квадратичному загалом.

Висновки

Знайдено достатні умови стійкості за ймовірністю загалом, асимптотичної стохастичної стійкості загалом, стійкості в середньому квадратичному загалом та асимптотичної стійкості в середньому квадратичному загалом сильного розв'язку дифузійних стохастичних диференціально-різницевих рівнянь з урахуванням як внутрішніх марковських параметрів, так і зовнішніх збурень типу ланцюга Маркова.

Література

[1] Андронов А. А. О стохастическом рассмотрении динамических систем / А. А. Андронов, Л. С. Понтрягин, А. А. Витт. – ЖЭТТ, 1933. – Вып. 3. – № 3. – С. 165–180.

[2] Ворович Н. Н. Об устойчивости движения при случайных возмущениях / Н. Н. Ворович // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1965. – Т.20. – № 1. – С. 43–48.

[3] Гихман И.И. Стохастические дифференциальные уравнения и их применения / И.И. Гихман, А.В. Скороход. – К.: Наукова думка. – 1982. – 612 с.

[4] Мильмар В. Д. Об устойчивости движения при наличии толчков / В. Д. Мильмар, А. Д. Мышкис // Сиб. мат. журн. – 1960. – Т.1, № 2. – С. 233–237.

[5] Кац И. Я. Об устойчивости систем со случайными параметрами / И. Я. Кац, Н. Н. Красовский // Прикл. мат. и механ. – 1960, Т. 24, Вып. 5. – С. 809–823.

[6] Кац И. Я. Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости и стабилизации систем случайной структуры / И. Я. Кац. – Екатеринбург: УГАПС, 1998. – 222 с.

[7] Свердан М. Л. Устойчивость стохастических импульсных систем / М. Л. Свердан, Е. Ф. Царьков. – Рига: РТУ, 1994. – 300 с.

[8] Лукашив Т. О. Метод функций Ляпунова исследования устойчивости стохастических систем Ито случайной структуры с импульсными марковскими переключениями. I. Общие теоремы об устойчивости импульсных стохастических систем / Т. О. Лукашив, И. В. Юрченко, В. К. Ясинский // Кибернетика и системный анализ. – 2009.– № 2. – С. 135–145.

[9] Лукашив Т. О. Метод функций Ляпунова исследования устойчивости стохастических систем Ито случайной структуры с импульсными марковскими переключениями. II. Устойчивость по первому приближению импульсных стохастических систем с марковскими параметрами / Т. О. Лукашив, И. В. Юрченко, В. К. Ясинский // Кибернетика и системный анализ. – 2009. – № 3. – С. 146–158.

[10] Королюк В. С. Ймовірність, статистика та випадкові процеси. Теорія та комп'ютерна практика: у 3 т. Т. 3 : Випадкові процеси. Теорія та комп'ютерна практика / В. С. Королюк, Є. Ф. Царков, В. К. Ясинський. – Чернівці: Золоті литаври, 2009. – 798 с.

[11] Дынкин Е. Б. Марковские процессы / Е. Б. Дынкин. – М. : Физматгиз, 1969. – 859 с.

[12] Скороход А. В. Асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений / А. В. Скороход. – К: Наук. думка, 1987. – 328 с.

[13] Дуб Дж. Вероятностные процессы / Дж. Дуб. – М: Физматгиз, 1963. – 605 с.

[14] Лукашів Т.О. Вибрані питання стійкості систем випадкової структури зі скінченною післядією з урахуванням зовнішніх марковських перемикань / Т.О. Лукашів, Я.М. Чабанюк, В.К. Ясинський // Вісник національного університету "Львівська політехніка", серія "Фізико-математичні науки". 2010. – № 687. – С. 126–131.

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С МАРКОВСКИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Т.О. Лукашив[a], Я.М. Чабанюк[b], В.К. Ясинский[a]

[a] *Черновецкий национальный университет имени Юрия Федьковича, ул. Коцюбигского, 28, Черновцы, 58000, Украина*
[b] *Национальный университет "Львивська политехника", ул. С. Бандеры, 12, Львов, 79013, Украина*

Использовано апарат функционалов Ляпунова–Красовского для исследования асимптотической стохастической стойкости в целом в среднем квадратичном в целом сильном решении диффузионных стохастических дифференциально-функциональных уравнений с учитыванием внутренних марковских параметров и внешних переключений типа Маркова.

Ключевые слова: стохастические дифференциально-разничные уравнения, марковские переключения, функционал Ляпунова–Красовского.

2000 MSC: 60J10, 60J27, 60H10, 68U20

УДК: 519.217; 519.718

ON ASYMPTOTIC BEHAVIOUR OF THE SOLUTIONS OF THE STOCHASTIC DIFFERENTIAL DIFFERENCE EQUATIONS SYSTEMS WITH MARKOV PARAMETERS

T.O. Lukashiv[a], Ya.M Chabanyuyk[b], V.K. Yasynskyy[a]

[a] *Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Kotsubinsky Str., 2 58012, Chernivtsi, Ukraine*
[b] *National University "Lvivska Politechnika" 12 S. Bandera Str., 79013, Lviv, Ukraine*

The Lyapunov-Krasovskyi functionals method is used for the investigation of the asymptotic stochastic stability in the whole, asymptotic stability in the mean square of the strong solution of the diffusion stochastic differential difference equations with internal Markov parameters and external switchings of the type of Markov chain.

Key words: stochastic differential difference equations, Markov switchings, Lyapunov-Krasovskyi functional.

2000 MSC: 60J10, 60J27, 60H10, 68U20

УДК: 519.217; 519.718