ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
Вип.696 № 696, (2011) с. 69–74

JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY
"LVIVSKA POLITECHNIKA"
"Physical & mathematical sciences"
Vol.696 No 696, (2011) 69–74

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЗОБРАЖЕННЯ ДОДАТНО ВИЗНАЧЕНИХ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

О.В. Лопотко

Національний лісотехнічний університет
вул. Генерала Чупринки 103, 79057, Львів, Україна

(Отримано 4 травня 2011 р.)

Одержано інтегральне зображення додатно визначених функцій однієї змінної, для яких ядро $K(x,y)$ додатно визначено.

Ключові слова: інтегральне зображення, додатно визначені функції.

2000 MSC: 34860

УДК: 517.9

Вступ

У праці [1] М.Г. Крейн застосував метод напрямних функціоналів для одержання інтегральних зображень додатно визначених ядер $K(x,y)\left(x,y \in R^1\right)$. Ю.М. Березанський в [2] запропонував метод одержання інтегральних зображень для додатно визначених ядер $K(x,y)\left(x,y \in R^1\right)$ за допомогою власних функцій диференціальних операторів. Цей метод полягає у введенні за ядром $K(x,y)$ $\left(x,y \in R^1\right)$ гільбертового простору і побудові розвинення за узагальненими власними векторами самоспряжених операторів, які розглядаються у цьому просторі; відповідна рівність Парсеваля дає потрібне зображення. У цій роботі розглядаються додатно визначені функції однієї змінної, які пов'язані з оператором $\dfrac{d^3}{dx^3}$.

Означення. Дійсну неперервну функцію $k(x)$ $(x \in C)$, називатимемо додатно визначеною (д.в.), якщо для довільної фінітної функції $u(x) \in C_0^\infty\left(R^1\right)$ виконується нерівність

$$\int\limits_{R^1}\int\limits_{R^1} K(x,y)\; u(y)\; \overline{u(x)}\, dxdy \ge 0, \tag{1}$$

де

$$K(x,y) = \frac{1}{9}\sum_{l=0}^{2}\sum_{m=0}^{2} k\left(xe^{\frac{2\pi i}{3}l} + ye^{\frac{2\pi i}{3}m}\right).$$

Теорема. *Кожна д.в. функція $k(x)$ $(x \in C)$, яка задовольняє умову*

$$k(x) = k\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}x\right) = k\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}x\right) \tag{2}$$

допускає зображення

$$k(x) = \int\limits_{-\infty}^{0}\left[\frac{1}{3}\,e^{-\sqrt[3]{|\lambda|}x} + \frac{2}{3}\,e^{\frac{\sqrt[3]{|\lambda|}}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{|\lambda|}x\right] d\rho(\lambda) + \int\limits_{0}^{\infty}\left[\frac{1}{3}\,e^{\sqrt[3]{\lambda}x} + \frac{2}{3}\,e^{\frac{-\sqrt[3]{\lambda}x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x\right] d\rho(\lambda), \tag{3}$$

де $d\rho(\lambda)$ — невід'ємна, скінченна міра, яка визначається неоднозначно. Навпаки, функція вигляду (3) є д.в. і для неї виконується умова (2).

Доведення. ☐ За функцією $k(x)$ введемо квазіскалярний добуток у просторі $L_2(R^1, dx)$:

$$\langle u,v\rangle_{H_K} = \int\limits_{R^1}\int\limits_{R^1} K(x,y)\, u(y)\, \overline{v(x)}\, dxdy, \quad \left(u,v \in C_0^\infty\left(R^1\right)\right).$$

Після проведення факторизації й поповнення одержимо гільбертів простір H_k. За допомогою просторів $H_0 = L_2(R^1, dx)$ і $H_+ = H_k$ побудуємо оснащення $H_- \supseteq H_0 \supseteq H_k$.

Нехай тепер у просторі $L_2(R^1, dx)$ діє мінімальний оператор A, який відповідає виразу $L = \dfrac{d^3}{dx^3}$. Цей оператор допускає продовження оснащення $H_- \supseteq \supseteq H_0 \supseteq H_k \supset Д$, у якому за $Д$ можна взяти простір $C_0^\infty(R^1)$, належно топологізований. Звуження A^* на $Д$ збігається з відображенням $u \to L^+u$, $u \in C_0^\infty\left(R^1\right)$, тополізованим належно. Тоді умова комутування $K(x,y)$ і A еквівалентна ермітовості звуження A^* на $Д$ в просторі H_k, тобто рівності

$$\left\langle L^+u, v\right\rangle = \left\langle u, L^+v\right\rangle \quad \left(u,v \in C_0^\infty(R^1)\right). \tag{4}$$

Оскільки для додатно визначеного ядра (1) рівність (4) виконується

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3}K(x,y) = \overline{\frac{\partial^3}{\partial y^3}K(x,y)},$$

то ядро $K(x,y)$ комутує з $\dfrac{d^3}{dx^3}$. Тому для ядра $K(x,y)$ можна використати теорему 3.5 [3, ст.657] і застосувати зображення (3.20).

Для цього потрібно знайти фундаментальну систему розв'язків рівняння

$$\frac{d^3u}{dx^3} = \lambda u. \tag{5}$$

Для цього спочатку знайдемо загальний розв'язок рівняння (5). Оскільки корені характеристичного рівняння $K^3 - \lambda = 0$ є $K_1 = \sqrt[3]{\lambda}$,, якщо $\lambda > 0$ і $-\sqrt[3]{|\lambda|}$, якщо $\lambda < 0$, $K_{2,3} = \dfrac{-\sqrt[3]{\lambda} \pm i\sqrt{3}\sqrt[3]{\lambda}}{2}$, то загальний розв'язок (5), якщо $\lambda \geq 0$, матиме вигляд

$$u = C_1 e^{\sqrt[3]{\lambda}x} + C_2 e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda}x}{2}} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x +$$
$$+ C_3 e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda}x}{2}} \sin\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x.$$

Якщо $\lambda < 0$, загальний розв'язок буде такий:

$$u = C_1 e^{-\sqrt[3]{|\lambda|}x} + C_2 e^{\frac{\sqrt[3]{|\lambda|}}{2}x} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{|\lambda|}x +$$
$$+ C_3 e^{\frac{\sqrt[3]{|\lambda|}x}{2}} \sin\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{|\lambda|}x.$$

Тоді фундаментальна система розв'язків (5), яка задовольняє умови

$$\frac{d^k}{dx^k}\chi_j\,(x;\lambda)\big|_{x=0} = \delta_{jk} \quad (j,k = 0,1,2)$$

буде

$$\chi_0\,(x;\lambda) = \begin{cases} \dfrac{1}{3}\,e^{-\sqrt[3]{|\lambda|}x} + \dfrac{2}{3}\,e^{\frac{\sqrt[3]{|\lambda|}x}{2}} \cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{|\lambda|}\,x \;\; (\lambda < 0)\,, \\ \dfrac{1}{3}\,e^{\sqrt[3]{\lambda}x} + \dfrac{2}{3}\,e^{\frac{-\sqrt[3]{\lambda}x}{2}} \cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x \;\;\; (\lambda \geq 0)\,; \end{cases}$$

$$\chi_1\,(x;\lambda) = \begin{cases} \dfrac{1}{3}e^{-\sqrt[3]{|\lambda|}x} - \dfrac{1}{3}e^{\frac{\sqrt[3]{|\lambda|}x}{2}} \cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{|\lambda|}x + \dfrac{1}{\sqrt{3}}e^{\frac{\sqrt[3]{|\lambda|}}{2}x} \sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{|\lambda|}x \; (\lambda < 0)\,, \\ \dfrac{1}{3}e^{\sqrt[3]{\lambda}x} - \dfrac{1}{3}e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda}x}{2}} \cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x + \dfrac{1}{\sqrt{3}}e^{\frac{-\sqrt{\lambda}}{2}x} \sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x \;\; (\lambda \geq 0)\,; \end{cases}$$

$$\chi_2\,(x;\lambda) = \begin{cases} \dfrac{1}{3}e^{-\sqrt[3]{|\lambda|}x} - \dfrac{1}{3}e^{\frac{\sqrt[3]{|\lambda|}x}{2}} \cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{|\lambda|}x - \dfrac{1}{\sqrt{3}}e^{\frac{\sqrt[3]{|\lambda|}x}{2}} \sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{|\lambda|}x \; (\lambda < 0)\,, \\ \dfrac{1}{3}e^{\sqrt[3]{\lambda}x} - \dfrac{1}{3}e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda}x}{2}} \cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x - \dfrac{1}{\sqrt{3}}e^{\frac{-\sqrt[3]{\lambda}}{2}x} \sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x \;\; (\lambda \geq 0)\,. \end{cases}$$

Зображення (3.20) із 3.5 [3, с.657] матиме такий вигляд:

$$K\,(x,y) = \int\limits_{R^1} \chi_0\,(x;\lambda)\,\chi_0\,(y,\lambda)\,d\sigma_{00}\,(\lambda) +$$
$$+ \int\limits_{R^1} \chi_0\,(x;\lambda)\,\chi_1\,(y,\lambda)\,d\sigma_{01}\,(\lambda) +$$
$$+ \int\limits_{R^1} \chi_0\,(x;\lambda)\,\chi_2\,(y,\lambda)\,d\sigma_{02}\,(\lambda) +$$
$$+ \int\limits_{R^1} \chi_1\,(x;\lambda)\,\chi_0\,(y,\lambda)\,d\sigma_{10}\,(\lambda) +$$
$$+ \int\limits_{R^1} \chi_1\,(x;\lambda)\,\chi_1\,(y,\lambda)\,d\sigma_{11}\,(\lambda) +$$
$$+ \int\limits_{R^1} \chi_1\,(x;\lambda)\,\chi_2\,(y,\lambda)\,d\sigma_{12}\,(\lambda) +$$
$$+ \int\limits_{R^1} \chi_2\,(x;\lambda)\,\chi_0\,(y,\lambda)\,d\sigma_{20}\,(\lambda) +$$
$$+ \int\limits_{R^1} \chi_2\,(x;\lambda)\,\chi_1\,(y,\lambda)\,d\sigma_{21}\,(\lambda) +$$
$$+ \int\limits_{R^1} \chi_2\,(x;\lambda)\,\chi_2\,(y,\lambda)\,d\sigma_{22}\,(\lambda)\,, \tag{6}$$

де $\quad d\sigma_{jk}\,(\lambda) = \left(\dfrac{\partial^{j+k}\Omega_\lambda}{\partial x^j \partial x^k}\right)(0,0)\,d\rho\,(\lambda)\,,$

$\Omega_\lambda\,(x,y) = \sum\limits_{j,k=0}^{2} \left(\dfrac{\partial^{j+k}\Omega_\lambda}{\partial x^j \partial x^k}\right)(0,0)\,\chi_j\,(x;\lambda)\,\overline{\chi_k\,(y;\lambda)}.$

Тепер зробимо деякі зауваження:

1. $\chi_0\,(x;\lambda) = \chi_0\left(\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}x;\lambda\right) =$
$\qquad = \chi_0\left(\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}x;\lambda\right).$

Дійсно,

$$\chi_0\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}x;\lambda\right) = \frac{1}{3}e^{\sqrt[3]{\lambda}\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}x\right)} +$$
$$+ \frac{1}{3}\left[e^{\sqrt[3]{\lambda}\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}x\right)} + e^{\sqrt[3]{\lambda}x}\right] =$$

$$= \frac{2}{3}e^{\frac{-\sqrt[3]{\lambda}}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x+\frac{1}{3}e^{\sqrt[3]{\lambda}x}=\chi_0\left(x;\lambda\right)\quad\left(\lambda\geq 0\right);$$

$$\chi_0\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}x;\lambda\right)=\frac{1}{3}e^{\sqrt[3]{\lambda}\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}x\right)}+$$

$$+\frac{1}{3}\left[e^{\sqrt[3]{\lambda}}+e^{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x}\right]=$$

$$=\frac{2}{3}e^{\frac{-\sqrt[3]{\lambda}}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x+\frac{1}{3}e^{\sqrt[3]{\lambda}x}=\chi_0\left(x;\lambda\right)\quad\left(\lambda\geq 0\right);$$

$$\chi_0\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}x;\lambda\right)=\frac{1}{3}e^{-\sqrt[3]{|\lambda|}\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}x\right)}+$$

$$+\frac{1}{3}\left[e^{-\sqrt[3]{|\lambda|}x}+e^{\sqrt[3]{|\lambda|}\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)x}\right]=$$

$$=\frac{1}{3}e^{-\sqrt[3]{|\lambda|}x}+\frac{2}{3}e^{\frac{-\sqrt[3]{\lambda}}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{|\lambda|}x=\chi_0\left(x;\lambda\right)\left(\lambda<0\right);$$

$$\chi_0\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}x;\lambda\right)=\frac{1}{3}e^{-\sqrt[3]{|\lambda|}\left(-\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}x\right)}+$$

$$+\frac{1}{3}\left[e^{\sqrt[3]{|\lambda|}\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}x\right)}+e^{-\sqrt[3]{|\lambda|}}\right]=$$

$$=\frac{1}{3}e^{\frac{-\sqrt[3]{|\lambda|}}{2}x}+\frac{2}{3}e^{\frac{\sqrt[3]{|\lambda|}}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x=\chi_0\left(x;\lambda\right)\quad\left(\lambda<0\right).$$

2. $$\chi_1\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}x;\lambda\right)+\chi_1\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}x;\lambda\right)=$$

$$=-\chi_1\left(x;\lambda\right).$$

Дійсно,

$$\chi_1\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}x;\lambda\right)=\frac{1}{3}e^{\sqrt[3]{\lambda}\left(-\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}x\right)}-$$

$$-\frac{1}{3}\left(\frac{e^{\sqrt[3]{\lambda}\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}x\right)}+e^{\sqrt[3]{\lambda}x}}{2}\right)+$$

$$+\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{e^{\sqrt[3]{\lambda}\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}x\right)}-e^{\sqrt[3]{\lambda}x}}{2i}\right)\quad\left(\lambda\geq 0\right),$$

$$\chi_1\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}x;\lambda\right)=\frac{1}{3}e^{\sqrt[3]{\lambda}\left(-\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}x\right)}-$$

$$-\frac{1}{3}\left(\frac{e^{\sqrt[3]{\lambda}x}+e^{\sqrt[3]{\lambda}\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}x\right)}}{2}\right)+$$

$$+\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{e^{\sqrt[3]{\lambda}x}-e^{\sqrt[3]{\lambda}\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}x\right)}}{2i}\right)\quad\left(\lambda\geq 0\right).$$

Тоді

$$\chi_1\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}x;\lambda\right)+\chi_1\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}x;\lambda\right)=$$

$$=\frac{1}{3}e^{\frac{-\sqrt[3]{\lambda}}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x-\frac{1}{3}e^{\sqrt[3]{\lambda}x}-$$

$$-\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda}}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x=-\chi_1\left(x;\lambda\right)\quad\left(\lambda\geq 0\right),$$

$$\chi_1\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}x;\lambda\right)=\frac{1}{3}e^{\frac{-\sqrt[3]{|\lambda|}}{2}\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}x\right)}-$$

$$-\frac{1}{3}\left(\frac{e^{-\sqrt[3]{|\lambda|}x}+e^{\left(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{|\lambda|}x}}{2}\right)+$$

$$+\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{e^{-\sqrt[3]{|\lambda|}x}-e^{\left(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{|\lambda|}x}}{2i}\right)\quad(\lambda<0).$$

Тоді

$$\chi_1\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}x;\lambda\right)+\chi_1\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}x;\lambda\right)=$$

$$=-\frac{1}{3}e^{-\sqrt[3]{\lambda}x}+\frac{1}{3}e^{\frac{\sqrt[3]{|\lambda|}}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{|\lambda|}x-$$

$$-\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-\frac{\sqrt[3]{|\lambda|}}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x=-\chi_1\left(x;\lambda\right)\quad(\lambda<0).$$

3. $$\chi_2\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}x;\lambda\right)+\chi_2\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}x;\lambda\right)=$$

$$=-\chi_2\left(x;\lambda\right).$$

Дійсно,

$$\chi_2\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}x;\lambda\right)=\frac{1}{3}e^{\sqrt[3]{\lambda}\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}x\right)}-$$

$$-\frac{1}{3}\left(\frac{e^{\sqrt[3]{\lambda}\frac{\left(-1-i\sqrt{3}\right)}{2}x}+e^{\sqrt[3]{\lambda}x}}{2}\right)-$$

$$-\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{e^{\sqrt[3]{\lambda}\frac{\left(-1-i\sqrt{3}\right)}{2}x}-e^{\sqrt[3]{\lambda}x}}{2i}\right)\quad\left(\lambda\geq 0\right),$$

$$\chi_2\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}x;\lambda\right)=\frac{1}{3}e^{\sqrt[3]{\lambda}\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}x\right)}-$$

$$-\frac{1}{3}\left(\frac{e^{\sqrt[3]{\lambda}x}+e^{\sqrt[3]{\lambda}\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}x\right)}}{2}\right)-$$

$$-\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{e^{\sqrt[3]{\lambda}x}-e^{\sqrt[3]{\lambda}\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}x\right)}}{2i}\right)\quad\left(\lambda\geq 0\right).$$

Тоді

$$\chi_2\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}x;\lambda\right)+\chi_2\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}x;\lambda\right)=$$

$$=\frac{1}{3}e^{\sqrt[3]{\lambda}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x+$$

$$+\frac{2}{3}e^{\frac{-\sqrt[3]{\lambda}}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x-\frac{1}{3}e^{\sqrt[3]{\lambda}x}=-\chi_2\left(x;\lambda\right)\quad\left(\lambda\geq 0\right),$$

$$\chi_2\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}x;\lambda\right)=\frac{1}{3}e^{-\sqrt[3]{\lambda}\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}x\right)}-$$
$$-\frac{1}{3}\left(\frac{e^{-\sqrt[3]{|\lambda|}x}+e^{\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{|\lambda|}x}}{2}\right)-$$
$$-\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{e^{-\sqrt[3]{\lambda}x}-e^{\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{|\lambda|}x}}{2i}\right)\quad(\lambda<0)\,,$$

$$\chi_2\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}x;\lambda\right)=\frac{1}{3}e^{-\sqrt[3]{|\lambda|}\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}x\right)}-$$
$$-\frac{1}{3}\left(\frac{e^{-\sqrt[3]{|\lambda|}x}+e^{\left(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{|\lambda|}x}}{2}\right)-$$
$$-\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{e^{\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{|\lambda|}x}-e^{\sqrt[3]{|\lambda|}x}}{2i}\right)\quad(\lambda<0)\,.$$

Тоді

$$\chi_2\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}x;\lambda\right)+\chi_2\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}x;\lambda\right)=$$
$$=\frac{1}{3}e^{\frac{\sqrt[3]{\lambda}x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{|\lambda|}x+$$
$$+\frac{2}{3}e^{\frac{\sqrt[3]{\lambda}}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x-\frac{1}{3}e^{-\sqrt[3]{|\lambda|}x}=-\chi_2\left(x;\lambda\right)\quad(\lambda<0)\,.$$

Якщо в нерівності (6) замінимо спочатку x на $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}x$ $\left(=xe^{\frac{2\pi i}{3}}\right)$, а потім x на $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}x$ $\left(=xe^{\frac{4\pi i}{3}}\right)$ і додамо отримані рівності до (6), то одержимо зображення

$$K(x,y)=\int\limits_{R^1}\chi_0\left(x;\lambda\right)\chi_0\left(y;\lambda\right)d\sigma_{00}\left(\lambda\right).\qquad(7)$$

Потім, прийнявши у (7) $y=0$ і, враховуючи (2), одержимо зображення (3). Останнє твердження теореми доводимо так. Із зображення (3) знайдемо спочатку всі доданки ядра $K(x,y)$ якщо $\lambda\geq 0$, а саме:

$$K(x+y)=\int\limits_{R^1_+}\left\{\frac{1}{3}e^{\sqrt[3]{\lambda}(x+y)}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{3}\left[e^{\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{\lambda}(x+y)}+e^{\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{\lambda}(x+y)}\right]\right\}d\rho\left(\lambda\right),\qquad(8)$$

$$K\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}x+\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}y\right)=$$
$$=\int\limits_{R^1_+}\left\{\frac{1}{3}e^{\sqrt[3]{\lambda}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x+\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{\lambda}y}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{3}\left[e^{\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{\lambda}x+\sqrt[3]{\lambda}y}+e^{\sqrt[3]{\lambda}x+\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{\lambda}y}\right]\right\}d\rho\left(\lambda\right),\qquad(9)$$

$$K\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}x+\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}y\right)=$$
$$=\int\limits_{R^1_+}\left\{\frac{1}{3}e^{\sqrt[3]{\lambda}\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x+\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{\lambda}y}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{3}\left[e^{\sqrt[3]{\lambda}x+\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{\lambda}y}+e^{\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{\lambda}x+\sqrt[3]{\lambda}y}\right]\right\}d\rho\left(\lambda\right),\qquad(10)$$

$$K\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\left(x+y\right)\right)=\int\limits_{R^1_+}\left\{\frac{1}{3}e^{\sqrt[3]{\lambda}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(x+y)}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{3}\left[e^{\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x+\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{\lambda}y}+e^{\sqrt[3]{\lambda}x+\sqrt[3]{\lambda}y}\right]\right\}d\rho\left(\lambda\right),\qquad(11)$$

$$K\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\left(x+y\right)\right)=\int\limits_{R^1_+}\left\{\frac{1}{3}e^{\sqrt[3]{\lambda}\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(x+y)}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{3}\left[e^{\sqrt[3]{\lambda}x+\sqrt[3]{\lambda}y}+e^{\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{\lambda}x+\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{\lambda}y}\right]\right\}d\rho\left(\lambda\right),\qquad(12)$$

$$K\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}x+y\right)=\int\limits_{R^1_+}\left\{\frac{1}{3}e^{\sqrt[3]{\lambda}\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}x\right)+\sqrt[3]{\lambda}y}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{3}\left[e^{\sqrt[3]{\lambda}\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)x+\sqrt[3]{\lambda}\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)y}+e^{\sqrt[3]{\lambda}\left(x+\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}y\right)}\right]\right\}d\rho\left(\lambda\right),\qquad(13)$$

$$K\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}x+y\right)=\int\limits_{R^1_+}\left\{\frac{1}{3}e^{\sqrt[3]{\lambda}\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}x\right)+\sqrt[3]{\lambda}y}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{3}\left[e^{\sqrt[3]{\lambda}\left(x+\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}y\right)}+e^{\sqrt[3]{\lambda}\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}x+\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}y\right)}\right]\right\}d\rho\left(\lambda\right),\qquad(14)$$

$$K\left(x+\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}y\right)=\int\limits_{R^1_+}\left\{\frac{1}{3}e^{\sqrt[3]{\lambda}\left(x+\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}y\right)}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{3}\left[e^{\sqrt[3]{\lambda}\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}x+\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}y\right)}+e^{\sqrt[3]{\lambda}\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}x+y\right)}\right]\right\}d\rho\left(\lambda\right),\qquad(15)$$

$$K\left(x+\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}y\right)=\int\limits_{R^1_+}\left\{\frac{1}{3}e^{\sqrt[3]{\lambda}\left(x+\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}y\right)}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{3}\left[e^{\sqrt[3]{\lambda}\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}x+y\right)}+e^{\sqrt[3]{\lambda}\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}x+\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}y\right)}\right]\right\}d\rho\left(\lambda\right).\qquad(16)$$

Із (8)–(10) випливає, що

$$K\left(x+y\right)+K\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}x+\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}y\right)+$$
$$+K\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}x+\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}y\right)=$$
$$=\int\limits_{R_+^1}\left\{\frac{1}{3}\,e^{\sqrt[3]{\lambda}(x+y)}+\frac{2}{3}e^{\sqrt[3]{\lambda}y}\cdot e^{\frac{-\sqrt[3]{\lambda}}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x+\right.$$
$$+\frac{2}{3}e^{\sqrt[3]{\lambda}x}\cdot e^{\frac{-\sqrt[3]{\lambda}}{2}y}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}y+$$
$$\left.+\,\frac{4}{3}e^{\frac{-\sqrt[3]{\lambda}}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x\cdot e^{\frac{-\sqrt[3]{\lambda}}{2}y}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}y\right\}d\rho\left(\lambda\right). \tag{17}$$

Із (11), (12) випливає, що

$$K\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\left(x+y\right)\right)+K\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\left(x+y\right)\right)=$$
$$=\int\limits_{R_+^1}\left\{\frac{2}{3}e^{\sqrt[3]{\lambda}(x+y)}+\frac{2}{3}e^{\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{\lambda}x+\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{\lambda}y}+\right.$$
$$\left.+\,\frac{2}{3}e^{\frac{(-1+i\sqrt{3})}{2}\sqrt[3]{\lambda}x+\frac{(-1+i\sqrt{3})}{2}\sqrt[3]{\lambda}y}\right\}d\rho\left(\lambda\right). \tag{18}$$

Із (13), (14) випливає, що

$$K\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}x+y\right)+K\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}x+y\right)=$$
$$=\int\limits_{R_+^1}\left\{\frac{2}{3}e^{\sqrt[3]{\lambda}x}\cdot e^{\frac{-\sqrt[3]{\sqrt{\lambda}}}{2}y}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}y+\right. \tag{19}$$
$$+\frac{2}{3}e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda}}{2}x}\cdot\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}xe^{\frac{\sqrt[3]{\lambda}}{2}y}+$$
$$\left.+\,\frac{1}{3}e^{\sqrt[3]{\lambda}\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}x\right)+\sqrt[3]{\lambda}\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}y\right)}\right\}d\rho\left(\lambda\right).$$

Із (15), (16) зрозуміло, що

$$K\left(x+\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}y\right)+K\left(x+\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}y\right)=$$
$$=\int\limits_{R_+^1}\left\{\frac{2}{3}e^{\sqrt[3]{\lambda}x}\cdot e^{\frac{-\sqrt[3]{\lambda}}{2}y}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}y+\right. \tag{20}$$
$$+\frac{2}{3}e^{\frac{-\sqrt[3]{\lambda}}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x\cdot e^{\sqrt[3]{\lambda}y}+$$
$$+\frac{1}{3}e^{\sqrt[3]{\lambda}\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}x+\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}y\right)}+$$
$$\left.+\frac{1}{3}e^{\sqrt[3]{\lambda}\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}x+\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}y\right)}\right\}d\rho\left(\lambda\right).$$

Додавши (17)–(20), одержимо

$$K\left(x+y\right)+K\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}x+\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}y\right)+$$
$$+K\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}x+\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}y\right)+$$
$$+K\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\left(x+y\right)\right)+K\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}x+y\right)+$$
$$+K\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}x+y\right)+K\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}x+y\right)+$$
$$+K\left(x+\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}y\right)+K\left(x+\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}y\right)=$$
$$=\int\limits_{R_+^1}\{4\,e^{\frac{-\sqrt[3]{\lambda}}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x\cdot e^{\frac{-\sqrt[3]{\lambda}}{2}y}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}y+$$
$$+\,2e^{\sqrt[3]{\lambda}x}\cdot e^{\frac{-\sqrt[3]{\lambda}.}{2}y}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}y+$$
$$\left.+\,2e^{\frac{.-\sqrt[3]{\lambda}}{2}x}\cdot\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x\cdot e^{\frac{\sqrt[3]{\lambda}.}{2}y}+e^{\sqrt[3]{\lambda}(x+y)}\right\}d\rho\left(\lambda\right). \tag{21}$$

Із (21) випливає, що

$$K\left(x,y\right)=\int\limits_{R_+^1}\left(\frac{1}{3}e^{\sqrt[3]{\lambda}x}+\frac{2}{3}e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda}x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x\right)\times$$
$$\times\left(\frac{1}{3}e^{\sqrt[3]{\lambda}y}+\frac{2}{3}e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda}x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}y\right)d\rho\left(\lambda\right)\quad\left(\lambda\geq 0\right). \tag{22}$$

Ядро $K\left(x,y\right)$ для $\left(\lambda<0\right)$ обчислюється аналогічно. У результаті одержимо

$$K\left(x,y\right)=\int\limits_{R_-^1}\left(\frac{1}{3}e^{-\sqrt[3]{|\lambda|}x}+\frac{2}{3}e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda}x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{|\lambda|}x\right)\times$$
$$\times\left(\frac{1}{3}e^{-\sqrt[3]{\lambda}y}+\frac{2}{3}e^{\frac{\sqrt[3]{|\lambda|}y}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{|\lambda|}y\right)d\rho\left(\lambda\right)\quad\left(\lambda<0\right). \tag{23}$$

За допомогою (22), (23) перевіряємо умову (1). Умови (2) випливають із зображення (3).

Теорему доведено. ■

Висновки

Доведено теорему інтегрального зображення додатно визначених функцій однієї змінної, пов'язаних з оператором $\frac{d^3}{dx^3}$. У [3] розглядались додатно визначені функції однієї змінної, пов'язані з операторами $\frac{d^r}{dx^r}$ $(r=1,2)$.

Література

[1] Крейн М.Г. Об одном общем методе разложения положительно определенных ядер на елементарные произведения. – ДАН СССР, т. 53, №1, 1946. – С. 3–6.

[2] Березанский Ю.М. Обобщение теоремы Бохнера на разложения по собственным функиям дифференциальных операторов – ДАН СССР, т.108, №3, 1956. – С. 893–896.

[3] Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – К.: Наук. думка, 1965. – 798 с.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННЫХ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

О.В. Лопотко

Национальный лесотехнический университет Украины,
ул. Генерала Чупринки 103, Львов, 79057, Украина

Получено интегральное представление положительно определенных функций одной переменной, для которых ядро $K(x,y)$ положительно определено.

Ключевые слова: интегральное представление положительно определенных функций.

2000 MSC: 34860

УДК: 517.9

THE INTEGRAL REPRESENTATION OF POSITIVELY DEFINITE FUNCTIONS OF ONE VARIABLE

O.V. Lopotko

National Univesity Forest of Lviv
103 General Chuprinka Str., 79057, Lviv, Ukraine

Integral representation is obtained for of positive definite function of one variable such that the kernel $K(x,y)$ is positively defined.

Key words: integral representation, positive definite function.

2000 MSC: 34860

УДК: 517.9