ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
“ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА”
“Фізико-математичні науки”
Вип.696 № 696, (2011) с. 20–25

JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY
“LVIVSKA POLITECHNIKA”
“Physical & mathematical sciences”
Vol.696 No 696, (2011) 20–25

ПРО ВІЛЬНІ ДОБУТКИ ПАРАТОПОЛОГІЧНИХ ГРУП ТА ВІЛЬНІ ПАРАТОПОЛОГІЧНІ ГРУПИ

Н. Пирч

Українська академія друкарства
вул. Підголоско, 19, 79020, Львів, Україна

(Отримано 29 вересня 2009 р.)

Досліджується топологія вільного добутку сім’ї паратопологічних груп як фактор-групи вільної групи над прямою сумою чи букетом топологічних носіїв цих груп.

Ключові слова: вільна топологічна група, вільна паратопологічна група, вільний добуток паратопологічних груп.

2000 MSC: 22A05

УДК: 512.46

Вступ

У цій роботі доводимо, що вільний добуток сім’ї паратопологічних груп може бути подано як фактор-група вільної групи над прямою сумою чи букетом просторів, що є топологічними носіями цих груп. Таке подання, зважаючи на добре розвинену теорію вільних топологічних груп та добре вивчені властивості цих груп, дає можливість одержати цілий клас топологічних характеристик, що зберігаються за переходу від груп-співмножників до їхнього вільного добутку.

Нагадаємо, що паратопологічною групою називається пара (G, τ), де G — група, τ — топологія на G, причому відображення множення $m\colon G \times G \to G$, $m(x, y) \mapsto xy$ є неперервним, а топологія τ називається при цьому напівгруповою. Якщо, крім того, відображення інверсії $i\colon G \to G$, $i(x) \mapsto x^{-1}$ є неперервним, то пара (G, τ) називається топологічною групою, а топологія τ називається груповою.

Вивчення вільних добутків топологічних груп бере свій початок з роботи М.І. Граєва [2]. Подальше дослідження вільних добутків топологічних груп пов’язане переважно зі школою С.А. Морріса. У роботах [2, 11–13] можна ознайомитися з основними властивостями вільних добутків топологічних груп.

Всюди у цій роботі вважатимемо, що I є непорожньою множиною індексів.

Означення 1. [4] Нехай $\{G_i\colon i \in I\}$ — сім’я паратопологічних груп. Паратопологічну групу G називатимемо вільним топологічним добутком груп G_i (позн. $\prod\limits_{i\in I}{}^{*} G_i$), якщо виконано умови:

1) група G містить групи G_i в якості своїх підгруп;

2) мінімальна підгрупа групи G, що містить всі підгрупи G_i співпадає з G;

3) якщо для кожного $i \in I$ існує неперервний гомоморфізм $f_i\colon G_i \to H$ з паратопологічної групи G_i у паратопологічну групу H, то існує неперервний гомоморфізм $f\colon G \to H$ з паратопологічної групи G у H такий, що $f|G_i = f_i$ для всіх $i \in I$.

Як було встановлено у [4] для кожної сім’ї $\{G_i : i \in I\}$ паратопологічних груп вільний топологічний добуток $\prod\limits_{i\in I}{}^{*} G_i$ існує і є єдиним з точністю до топологічного ізоморфізму, що залишає на місці всі елементи груп G_i. Якщо, крім того, усі співмножники G_i є топологічними групами, то вільний добуток $\prod\limits_{i\in I}{}^{*} G_i$ є топологічною групою, яка топологічно ізоморфна топологічній групі, що є вільним добутком цієї сім’ї у класі топологічних груп.

Означення 2. [3] Вільною топологічною групою простору X в сенсі Маркова називається топологічна група $F(X)$ з такими властивостями:

1) X підпростір в $F(X)$,

2) $Grp(X) = F(X)$,

3) для кожного неперервного відображення $f\colon X \to G$ в топологічну групу G існує неперервний гомоморфізм $f^*\colon F(X) \to G$ такий, що $f^*|X = f$.

Означення 3. [1] Нехай X — топологічний простір з фіксованою точкою e. Вільною топологічною групою простору X у сенсі Граєва називається топологічна група $FG(X)$ з такими властивостями:

1) X підпростір в $FG(X)$,

2) $Grp(X) = FG(X)$,

3) для кожного неперервного відображення f з простору X у довільну топологічну групу G, що відображає точку e в одиницю групи G, існує неперервний гомоморфізм f^* групи $FG(X)$ в G, що продовжує f.

Для кожного тихоновського простору X вільна топологічна група $F(X)$ у сенсі Маркова існує і єдина з точністю до топологічного ізоморфізму, що залишає на місці всі точки простору X (див. [3]). Для довільного тихоновського простору вільна топологічна група $FG(X)$ існує і з точністю до топологічного ізоморфізму не залежить від точки $e \in X$. Крім того, для тихоновського простору X вільні топологічні групи $F(X)$ і $FG(X)$ пов'язані співвідношенням $F(X) \simeq FG(X^+)$, де X^+ — топологічний простір, що одержується з простору X додаванням однієї ізольованої точки (див. [1]). З основними результатами теорії вільних топологічних груп можна ознайомитись у монографії [9].

Якщо в означеннях 2 і 3 слова "топологічна група" замінити всюди на слова "паратопологічна група", то ми одержимо поняття вільної паратопологічної групи простору X у сенсі Маркова (див. [16]) та вільної паратопологічної групи простору X у сенсі Граєва (див.[18]). Для кожного топологічного простору X вільна паратопологічна група $F_p(X)$ існує і єдина з точністю до топологічного ізоморфізму, що залишає на місці всі точки простору X (див. [16]). Для довільного топологічного простору X вільна паратопологічна група $FG_p(X)$ існує і з точністю до ізоморфізму не залежить від відзначеної точки e (див. [18]). Як і для вільних топологічних груп граєвські і марковські вільні паратопологічні групи пов'язані співвідношеннями $F_p(X) \simeq FG_p(X^+)$.

Нехай $\{X_s\}_{s\in S}$ — сім'я топологічних просторів з відзначеними точками $x_s \in X_s$. Тоді фактор-простір $\vee_{s\in S}(X_s, x_s) = (\underset{s\in S}{\oplus} X_s)/(\underset{s\in S}{\oplus} x_s)$ називатиметься букетом сім'ї (X_s, x_s). Нескладно пересвідчитись, що букет сім'ї тихоновських просторів буде знову тихоновським простором. У випадку, коли всі топологічні простори є однорідними, зокрема, коли усі $\{X_s\}_{s\in S}$ є паратопологічними групами букет $\vee_{s\in S}(X_s, x_s) = (\underset{s\in S}{\oplus} X_s)/(\underset{s\in S}{\oplus} x_s)$ з точністю до гомеоморфізму не залежить від вибору відзначених точок. Тому коли ми маємо справу з однорідними просторами записуватимемо букет скорочено $\vee_{s\in S} X_s$.

Вільний добуток як фактор-група вільної паратопологічної групи

Для топологічного простору X позначимо через $S(X)$ вільну топологічну напівгрупу простору X. Тоді $S(X) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} X^n$ (див. [10]).

Теорема 1. *Нехай $\mathcal{K}$ — клас просторів, замкнений відносно скінченних добутків, зліченних об'єднань і неперервних образів, $\{G_n : n \in \mathbb{N}\}$— зліченна сім'я паратопологічних груп. Тоді $\prod^*_{n\in\mathbb{N}} G_n \in \mathcal{K}$ тоді і тільки тоді, коли $G_n \in \mathcal{K}$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.*

□ *Доведення.* Необхідність випливає з того, що кожна група G_n є факторгрупою групи $\prod^*_{n\in\mathbb{N}} G_n$.

Достатність. Нехай $G_n \in \mathcal{K}$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Тоді $X = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} G_n \in \mathcal{K}$. Якщо $X \in \mathcal{K}$, то $X^n \in \mathcal{K}$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, а отже $S(X) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} X^n \in \mathcal{K}$. Таким чином $S(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} G_n) \in \mathcal{K}$. Оскільки $\prod^*_{n\in\mathbb{N}} G_n$ є топологічною напівгрупою, то неперервне відображення $f \colon \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} G_n \to \prod^*_{n\in\mathbb{N}} G_n$ означене як $f(x) = x$ для всіх $x \in G_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$ може бути продовжене до неперервного сюр'єктивного гомоморфізму $f^* \colon S(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} G_n) \to \prod^*_{n\in\mathbb{N}} G_n$ топологічних напівгруп $S(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} G_n)$ і $\prod^*_{n\in\mathbb{N}} G_n$. Оскільки $S(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} G_n) \in \mathcal{K}$, то $\prod^*_{n\in\mathbb{N}} G_n = f^*(S(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} G_n)) \in \mathcal{K}$. ■

Зокрема, в якості класу $\mathcal{K}$ в теоремі 1 ми можемо взяти клас σ-компактних просторів чи клас просторів із сітковою вагою, що не перевищує певного нескінченного числа τ.

Нехай $l(X)$ — число Ліндельофа топологічного простору X.

Наслідок 1. Нехай G, H — паратопологічні групи, такі, що $l(G^n * H^m) \le \tau$ для всіх $n, m \in \mathbb{N}$. Тоді $l(G * H) \le \tau$.

□ *Доведення.* Зауважимо, що за біномом Ньютона $(G \oplus H)^k = \overset{k}{\underset{i=0}{\oplus}} C^i_k \cdot G^i \times H^{k-i}$. Тому, якщо $l(G^n * H^m) \le \tau$ для всіх $n, m \in \mathbb{N}$, то $l((G \oplus H)^k) \le \tau$ для всіх $k \in \mathbb{N}$, а отже $l(S(G\oplus H)) \le \tau$. Оскільки простір $G*H$ є неперервним образом простору $S(G\oplus H)$, то $l(G * H) \le \tau$. ■

Нехай $\{f_i \colon G_i \to H_i \ : i \in I\}$ — сім'я гомоморфізмів паратопологічних груп. Тоді існує гомоморфізм $f \colon \prod^*_{i\in I} G_i \to \prod^*_{i\in I} H_i$ такий, що $f|_{G_i} = f_i$ для всіх $i \in I$. Гомоморфізм f називатимемо вільним добутком сім'ї гомоморфізмів $\{f_i : i \in I\}$ і позначатимемо $f = \prod^*_{i\in I} f_i$.

Узагальнюючи теорему 7.2 з роботи Ордмана [13], одержимо

Теорема 2. *Вільний добуток $f = \prod^*_{i\in I} f_i$ сім'ї неперервних гомоморфізмів $\{f_i \colon G_i \to H_i \ : i \in I\}$ є відкритим гомоморфізмом тоді і тільки тоді, коли усі співмножники f_i є відкритими гомоморфізмами.*

□ *Доведення.* Необхідність. Нехай $\{f_i \colon G_i \to H_i \ : i \in I\}$ — сім'я гомоморфізмів таких, що гомоморфізм $f = \prod^*_{i\in I} f_i$ є відкритим відображенням. Як було встановлено у [4] кожен співмножник G_i є образом вільного добутку $\prod^*_{i\in I} G_i$ при відкритій гомоморфній ретракції ρ_i. Нехай також $r_i \colon \prod^*_{i\in I} H_i \to H_i$ — відповідна відкрита гомоморфна ретракція. Тоді $r_i \circ (\prod^*_{i\in I} f_i) = f_i \circ \rho_i$. Відображення $r_i \circ (\prod^*_{i\in I} f_i)$ є відкритим як композиція двох відкритих відображень. З відкритості відображення $f_i \circ \rho_i$ і неперервності відображення ρ_i випливає відкритість відображення f_i.

Достатність. Нехай $\{f_i \colon G_i \to H_i \ : i \in I\}$ — сім'я гомоморфізмів паратопологічних груп, $f = \prod^*_{i\in I} f_i$. Тоді множина $G = \ker f$ є нормальною підгрупою у $\prod^*_{i\in I} G_i$. Позначимо через $H = (\prod^*_{i\in I} G_i)/G$ факторгрупу, а через $\pi \colon \prod^*_{i\in I} G_i \to H$ — природний гомоморфізм. Тоді π — відкрите відображення [17]. Отже, існує єдиний ізоморфізм $i \colon H \to \prod^*_{i\in I} H_i$ такий, що $f = i \circ \pi$. Тоді відображення i є неперервним тому, що f неперервний гомоморфізм, а π — відкритий гомоморфізм. Покажемо, що обернений ізоморфізм $j = i^{-1}$ також неперервний. Для цього достатньо показати, що звуження $j|H_i$ є неперервними для всіх $i{\in}I$. Оскільки $j \circ f{=}\pi$, то $(j|H_i) \circ f_i{=}\pi|X$. Відображення f_i є факторними, отже, з неперервності відображення π випливає неперервність відображень $j|H_i$ для всіх $i \in I$. Значить, i – топологічний ізоморфізм, а отже, гомоморфізм $f{=}i \circ \pi$ є відкритим. ■

Твердження 1. Нехай $\{G_i : i \in I\}$ — сім'я топологічних груп. Тоді група $\prod\limits_{i\in I}{}^{*}G_i$ є фактор-групою вільної топологічної групи $F(\bigoplus\limits_{i\in I}{}^{*}G_i)$.

□ *Доведення.* Тотожні відображення $f_i\colon G_i \to G_i$ продовжуються до відкритих гомоморфізмів $h_i\colon F(G_i) \to G_i$. Отже, гомоморфізм $h = \prod\limits_{i\in I}{}^{*}h_i\colon \prod\limits_{i\in I}{}^{*}F(G_i) \to \prod\limits_{i\in I}{}^{*}G_i$ є відкритим. Залишається зауважити, що група $\prod\limits_{i\in I}{}^{*}F(G_i)$ є топологічно ізоморфною групі $F(\bigoplus\limits_{i\in I}G_i)$ (див. [11]). ■

Наслідок 2. Нехай $\{G_i : i \in I\}$ — сім'я топологічних просторів. Тоді група $F(\bigoplus\limits_{i\in I}X_i)$ є фактор-групою групи $F(\bigoplus\limits_{i\in I}F(X_i))$.

Нехай X — тихоновський простір, X^{-1} — гомеоморфна копія простору X. Приймемо $\tilde{X} = X \oplus \{e\}X^{-1}$. Розглянемо σ-добуток зліченної кількості копій простору $\tilde{X}$ з ящиковою топологією $\sigma_{\Box}\tilde{X}^{\mathbb{N}}$ [5]. Якщо для тихоновського простору X виконано умови:

(s1) вільна топологічна група $F(X)$ має топологію індуктивної границі відносно просторів $F(X)_n$ слів довжини $\leq n$;

(s2) для кожного натурального n відображення множення $i_n\colon \tilde{X}^n \to F(X)_n$ є факторним;

то відображення множення $i\colon \sigma_{\Box}\tilde{X}^{\mathbb{N}} \to F(X)$ є факторним.

Наслідок 3. Нехай $\{G_i : i \in I\}$ — сім'я топологічних груп, $X = \bigoplus\limits_{i\in I}G_i$. Якщо для простору X виконано умови (s1) і (s2), то природне відображення множення $i_1\colon \sigma_{\Box}\tilde{X}^{\mathbb{N}} \to \prod\limits_{i\in I}{}^{*}G_i$ є факторним.

У роботі [5] було також дещо модифіковано згаданий σ-добуток до простору $\underset{\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}_+\,\Box}{\sigma}((X + X^{-1})^q)^2/\Delta_q$ так, щоб для довільного топологічного простору X відображення множення $j\colon \underset{\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}_+\,\Box}{\sigma}((X + X^{-1})^q)^2/\Delta_q \to F(X)$ було неперервним і відкритим.

Наслідок 4. Нехай $\{G_i : i \in I\}$ — сім'я топологічних просторів, $X = \bigoplus\limits_{i\in I}G_i$. Тоді природне відображення множення $j_1\colon \underset{\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}_+\,\Box}{\sigma}((X + X^{-1})^q)^2/\Delta_q \to \prod\limits_{i\in I}{}^{*}G_i$ є неперервним і відкритим.

Наслідок 5. Нехай $\{G_i : i \in I\}$ — сім'я топологічних груп, $X = \bigoplus\limits_{i\in I}G_i$. Якщо вільна топологічна група $F(X)$ простору X має топологію індуктивної границі відносно просторів $F(X)_n$ слів довжини $\leq n$, то паратопологічна група $G = \prod\limits_{i\in I}{}^{*}G_i$ має також топологію індуктивної границі відносно множин $G_{(n)}$ (тут $G_{(n)}$ — множина елементів з G, які мають у нескоротній формі довжину, що не перевищує n).

Зокрема, цей наслідок можна застосовувати в кожному з таких випадків:

а) X є k_ω-простором (див. [9]);

б) X є локально компактним метризованим сепарабельним простором (див. [14]);

в) усі скінченні степені простору X є нормальними і зліченно компактними просторами (див. [6]);

г) X є P-простором (тобто, кожна G_δ-множина у просторі X є відкритою) (див. [9]).

Аналогічно до твердження 2 доводиться твердження.

Твердження 2. Нехай $\{G_i : i \in I\}$ — сім'я паратопологічних груп. Тоді група $\prod\limits_{i\in I}{}^{*}G_i$ є фактор-групою вільної паратопологічної групи $F_p(\bigoplus\limits_{i\in I}{}^{*}G_i)$.

Твердження 3. Нехай $\mathcal{K}$ — клас тихоновських просторів замкнений відносно (скінченних, зліченних) об'єднаннь, відкритих образів, і такий, що $X \in \mathcal{K} \Rightarrow F(X) \in \mathcal{K}$. Тоді для довільної (скінченної, зліченної) сім'ї топологічних груп $\{G_i : i \in I\}$ маємо, що $\prod\limits_{i\in I}{}^{*}G_i \in \mathcal{K}$ тоді і тільки тоді, коли $G_i \in \mathcal{K}$ для всіх $i \in I$.

□ *Доведення.* Необхідність випливає з того, що G_i кожен співмножник є фактор-групою вільного добутку $\prod\limits_{i\in I}{}^{*}G_i$. Достатність випливає з твердження 4. ■

Зокрема, в якості класу $\mathcal{K}$ в твердженні 2 зліченної сім'ї топологічних груп ми можемо взяти клас k_ω-просторів.

З твердження 2 і того факту, що $d(X) = d(F(X))$ (див.[9]) випливає наслідок.

Наслідок 6. Нехай G, H — топологічні групи. Тоді
$d(G * H) = max\{d(G), d(H)\}$.

Аналогічно до твердження 8 доводиться таке твердження.

Твердження 4. Нехай $\mathcal{K}$ — клас топологічних просторів замкнений відносно (скінченних, зліченних) об'єднань, відкритих образів, і такий, що $X \in \mathcal{K} \Rightarrow F_p(X) \in \mathcal{K}$. Тоді для довільної (скінченної, зліченної) сім'ї паратопологічних груп $\{G_i : i \in I\}$ маємо, що $\prod\limits_{i\in I}{}^{*}G_i \in \mathcal{K}$ тоді і тільки тоді, коли $G_i \in \mathcal{K}$ для всіх $i \in I$.

Підмножина B топологічного простору X називається обмеженою, якщо кожна неперервна дійснозначна функція, задана на просторі X, є обмеженою на B. Топологічний простір X називається o-обмеженим, якщо він може бути зображений у вигляді зліченного об'єднання своїх обмежених підпросторів.

Твердження 5. Вільний добуток зліченної сім'ї топологічних груп є o-обмеженою топологічною групою тоді і тільки тоді, коли усі співмножники є o-обмеженими топологічнами групами.

□ *Доведення.* Необхідність випливає з того, що властивість бути o-обмеженим простором зберігається при неперервних відображеннях.

Достатність випливає з того, що пряма сума зліченної сімї o-обмежених просторів є o-обмеженим простором, а вільна топологічна група над o-обмеженим простором є o-обмеженою (див. [9]). ■

Як було встановлено у [1, 15] вільні топологічні та паратопологічні групи у сенсі Граєва та Маркова над букетом $\{X_s\}_{s\in S}$ просторів з відзначеними точками $x_s \in X_s$ з точністю до топологічного ізоморфізму не залежить від вибору відзначених точок $x_s \in X_s$.

Теорема 3. *Нехай (X_i, x_i), $i \in I$ — сім'я тихоновських просторів з відзначеними точками. Тоді вільний добуток $\prod\limits_{i\in I}{}^{*} FG(X_i)$ топологічно ізоморфний вільній топологічній групі $FG(\vee_{i\in I}(X_i, x_i))$.*

□ *Доведення.* Аналогічно до [11] перевіряється, що група $FG(\vee_{i\in I}(X_i, x_i))$, з нейтральним елементом x_0 (тут x_0 — образ точок x_i при факторному відображенні $p\colon \bigoplus\limits_{i\in I} X_i \to \vee_{i\in I}(X_i, x_i)$) задовольняє умови 1)–3) з означення вільного добутку для сім'ї вільних топологічних груп $\{FG(X_i) : i \in I\}$ з нейтральними елементами x_i. З єдиності вільного добутку випливає, що топологічні групи $\prod\limits_{i\in I}{}^{*} FG(X_i)$ і $FG(\vee_{i\in I}(X_i, x_i))$ є топологічно ізоморфними. ■

Наслідок 7. Нехай X та Y — тихоновські простори. Тоді

$$F(X) * FG(Y) \simeq FG(X) * F(Y) \simeq FG(X \oplus Y).$$

Аналогічно до теореми 3 справедливою є така теорема

Теорема 4. *Нехай (X_i, x_i), $i \in I$ — сім'я топологічних просторів з відзначеними точками. Тоді вільний добуток $\prod\limits_{i\in I}{}^{*} FG_p(X_i)$ топологічно ізоморфний вільній паратопологічній групі $FG_p(\vee_{i\in I}(X_i, x_i))$.*

Аналогічно до випадку вільних марковських груп для вільних граєвських груп справедливими є такі твердження.

Твердження 6. Нехай $\{G_i : i \in I\}$ — сім'я топологічних груп. Тоді група $\prod\limits_{i\in I}{}^{*} G_i$ є фактор-групою вільної топологічної групи $FG(\bigvee\limits_{i\in I} G_i)$.

Твердження 7. Нехай $\{G_i : i \in I\}$ — сім'я паратопологічних груп. Тоді група $\prod\limits_{i\in I}{}^{*} G_i$ є фактор-групою вільної паратопологічної групи $FG_p(\bigvee\limits_{i\in I} G_i)$.

Твердження 8. Нехай $\mathcal{K}$ — клас тихоновських просторів замкнений відносно переходу до (скінченних, зліченних) букетів, відкритих образів, і такий, що $X \in \mathcal{K} \Rightarrow FG(X) \in \mathcal{K}$. Тоді для довільної (скінченної, зліченної) сім'ї топологічних груп $\{G_i : i \in I\}$ маємо, що $\prod\limits_{i\in I}{}^{*} G_i \in \mathcal{K}$ тоді і тільки тоді, коли $G_i \in \mathcal{K}$ для всіх $i \in I$.

Твердження 9. Нехай $\mathcal{K}$ — клас топологічних просторів замкнений відносно переходу до (скінченних, зліченних) букетів, відкритих образів, і такий, що $X \in \mathcal{K} \Rightarrow FG_p(X) \in \mathcal{K}$. Тоді для довільної (скінченної, зліченної) сім'ї паратопологічних груп $\{G_i : i \in I\}$ маємо, що $\prod\limits_{i\in I}{}^{*} G_i \in \mathcal{K}$ тоді і тільки тоді, коли $G_i \in \mathcal{K}$ для всіх $i \in I$.

Зокрема, як клас $\mathcal{K}$ в твердженні 9 можемо застосувати класи зв'язних чи лінійно зв'язних топологічних просторів.

Нагадаємо, що топологічний простір X називається локально зв'язним, якщо для кожної точки $x \in X$ і для кожного її околу $U(x)$ існує зв'язна підмножина $C \subseteq U$, така, що $x \in \mathrm{Int\,C}$.

Лема 1. *Букет $\vee_{s\in S}(X_s, x_s)$ сім'ї топологічних просторів $\{X_s\}_{s\in S}$ з відзначеними точками $x_s \in X_s$є (локально) зв'язним топологічним простором тоді і тільки усі простори X_s є (локально) зв'язними просторами.*

□ *Доведення.* Необхідність випливає з того, що кожен простір X_s є фактор-простором букету $\vee_{s\in S}(X_s, x_s)$, а зв'язність і локальна зв'язність зберігаються при факторних відображеннях (див. вправа 6.3.3 (d) з [7]).

Достатність. Для зв'язності достатність випливає з наслідку 6.1.10 з [7]. Для локальної зв'язності достатність випливає з того, що пряма сума сім'ї локально зв'язних просторів є локально зв'язним простором (див. вправа 6.3.4 (b) з [7]), а букет $\vee_{s\in S}(X_s, x_s)$ є фактор-простором простору $\bigoplus\limits_{s\in S} X_s$. ■

Твердження 10. Вільний добуток $\prod\limits_{i\in I}{}^{*} G_i$ сім'ї топологічних груп $\{G_i : i \in I\}$ є зв'язною локально зв'язною групою тоді і тільки тоді, коли усі співмножники G_i є зв'язними локально зв'язними топологічними групами.

□ *Доведення.* Необхідність випливає з того, що зв'язність і локальна зв'язність зберігаються при факторних відображеннях (див. вправа 6.3.3 (d) [7]).

Достатність. Нехай топологічні носії топологічних груп $\{G_i : i \in I\}$ є зв'язними локально зв'язними топологічними просторами. Тоді за лемою 1 топологічний простір $\bigvee\limits_{i\in I}{}^{*} G_i$ є зв'язним локально зв'язним. Як було встановлено у [8] вільна топологічна група у сенсі Граєва зв'язного локально зв'язного тихоновського простору є зв'язною локально зв'язною топологічною групою. Оскільки вільний добуток $\prod\limits_{i\in I}{}^{*}G_i$ є фактор-групою вільної групи $FG_p(\bigvee\limits_{i\in I}{}^{*}G_i)$, а зв'язність і локальна зв'язність зберігаються у разі факторних відображень, то вільний добуток $\prod\limits_{i\in I}{}^{*}G_i$ є зв'язною локально зв'язною топологічною групою. ■

Література

[1] Граев М.И. Свободные топологические группы // Изв. АН СССР Сер. мат. – 1948. – Т.12, № 3, – С. 279–324.

[2] Граев М.И. О свободных произведениях топологических групп // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1950. – Т.14. – С. 343–350.

[3] Марков А.А. О свободных топологических группах // Известия АН СССР, Сер. мат. – 1945. – Т.9, № 1. – С. 3–64.

[4] Пирч Н.М. Вільні добутки паратопологічних груп // Математичні студії. – 2010. – Т. 33, № 2. – P. 139–146.

[5] Сипачева О.В. Топология свободной топологической группы // Фундаментальная и прикладная математика, – 2003. – Т. 9, № 2. – P. 99–204.

[6] Ткаченко М.Г., Строгая колективная нормальность и счетная компактность в свободных топологических группах // Сиб. мат. жур. – 1987. – Т.28, № 5. – С.167–177.

[7] Энгелькинг Р. Общая топология. – М.: Мир, – 1986, – 751 с.

[8] Alas O.T., Tkachenko M.G., Tkachuk V.V., Wilson R.G. Connectdness and local connectdness of topological groups and extensions // Comm. Math. Univ. Carolinae. – 1999. – vol. 40. № 4, – P. 735–753.

[9] Arhangel'skii A.V., Tkachenko M.G., Topological Groups and Related Structures // Atlantis Press, Amsterdam-Paris, – 2008, – 781 p.

[10] Banakh T.O., Guran I.Y., Gutik O.V. Free topological inverse semigroups // Matematichni Studii, – 2001. – vol. 15, № 1. – P. 23–43.

[11] Morris S.A. Free products of topological groups// Bull. Austral. Math. Soc. – 1971. – 4. – P. 17–29. Corrigendum. Bull. Austral. Math. Soc. 1975. – 12. – P. 480.

[12] Morris S.A., Ordman E. T. and Thompson H.B. The topology of free products of topological groups // Proc. Second Internat. Conf. Theory of Groups, Canberra, 1973, Springer Lecture Notes — 372. – P. 220–227.

[13] Ordman E. T. Free products of topological groups which are k_ω -spaces // Transactions of the Amer. Math. Soc., – 1974. – 191. – P. 61–73.

[14] Pestov V. and Yamada K. Free topological groups on metrizable spaces and inductive limits // Topology and its Applications. – 1999. – vol. 98. – P. 291–301.

[15] Pyrch N.M. On the isomorphisms of the free paratopological groups and free homogeneous spaces // Visnyk Lviv Univ., – Ser. Mech.-Math., – 2007. – vol. 63, – P. 224–232.

[16] Pyrch N.M., Ravsky O.V. On free paratopological groups // Matematichni Studii, – 2006, – vol. 25, № 2. – P. 115–125.

[17] Ravsky O.V. Paratopological groups I // Matematychni Studii. – 2001. – vol. 16, № 1. – P. 37–48.

[18] Romaguera S., Sanchis M., Tkachenko M. Free paratopological groups // Topology Proceedings. – 2002. – vol. 27. – P. 1–28.

О СВОБОДНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЯХ ПАРАТОПОЛОГИЧЕСКИХ ГРУПП И СВОБОДНЫХ ПАРАТОПОЛОГИЧЕСКИХ ГРУППАХ

Н.Пырч

Украинская академия печати
ул. Пидголоско, 19, 79020, Львов, Украина

Исследуется топология свободного произведения семьи паратопологических групп как фактор-группы свободной группы над прямой сумой или букетом топологических носителей этих групп.

Ключевые слова: свободная топологическая группа, свободная паратопологическая группа, свободное произведение паратопологических групп.

2000 MSC: 22A05

УДК: 512.546

ON FREE PRODUCTS OF PARATOPOLOGICAL GROUPS AND FREE PARATOPOLOGICAL GROUPS

N. Pyrch

Academy druk of Ukraine
19 Pidgolosko Str., 79020, Lviv, Ukraine

We investigate topology of the free products as the quotient group of the free group over direct sum or bouqet of the topological carriers of these groups.

Key words: free topological group, free paratopological group, free product of paratopological groups.

2000 MSC: 22A05

УДК: 512.46