ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
Вип.696 № 696, (2011) с. 40–46

JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY
"LVIVSKA POLITECHNIKA"
"Physical & mathematical sciences"
Vol.696 No 696, (2011) 40–46

ЗАДАЧА СПРЯЖЕННЯ ДЛЯ ДЕЯКИХ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ РІВНЯНЬ

М.Г. Хмельовський[a], В.М. Цимбал[a, b]

[a] *Національний університет "Львівська політехніка"*
вул. С. Бандери 12, 79013, Львів, Україна
[b] *Львівський національний університет імені Івана Франка*
вул. Університетська 1, 79000, Львів, Україна

(Отримано 30 березня 2011 р.)

Побудовано асимптотичні розвинення розв'язків задач спряження для сингулярно збурених параболічних рівнянь другого порядку, та сингулярно збурених звичайних диференціальних рівнянь другого порядку.

Ключові слова: задача спряження, сингулярне збурення, параболічне рівняння, примежовий шар, асимптотичне розвинення.

2000 MSC: 35K20, 35B25

УДК: 517.955.8

Вступ

Математичне моделювання фізичних процесів різної природи у середовищах з істотно різними фізичними характеристиками часто приводить до задач спряження для диференціальних рівнянь, як звичайних, так і рівнянь у частинних похідних. До того ж застосування процедури обезрозмірювання до отриманих рівнянь часто дає рівняння з одним чи декількома малими параметрами. Якщо ці параметри стоять при старших похідних, то такі рівняння називаються сингулярно збуреними. Отже, очевидна актуальність вивчення задач спряження для сингулярно збурених рівнянь. У цій роботі вивчаються задачі спряження для сингулярно збурених параболічних рівнянь другого порядку, а також сингулярно збурених параболічних рівнянь другого порядку і сингулярно збурених звичайних диференціальних рівнянь другого порядку.

Сингулярно збурені задачі спряження, дещо іншої природи, вивчали у роботах [1–3].

I. Формулювання задач

Нехай $D_1 = \{(x,t) : -1 < x < 0, 0 < t < T\}$ і $D_2 = \{(x,t) : 0 < x < 1, 0 < t < T\}$, $0 < T < +\infty$.

Розглянемо задачі:

А) Знайти розв'язок системи диференціальних рівнянь

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a(x,t)u = f(x,t) \text{ в } D_1,\\ \frac{\partial \nu}{\partial t} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} + b(x,t)\nu = g(x,t) \text{ в } D_2\end{gathered} \qquad (1)$$

за виконання початкових умов

$$u(x,0,\varepsilon) = 0,\ -1 < x < 0,\ \nu(x,0,\varepsilon) = 0,\ 0 < x < 1, \qquad (2)$$

граничних умов

$$u(-1,t,\varepsilon) = 0,\ \nu(1,t,\varepsilon) = 0,\ 0 < t < T \qquad (3)$$

та умов спряження

$$\begin{gathered}u(-0,t,\varepsilon) = \nu(+0,t,\varepsilon),\\ \frac{\partial u(-0,t,\varepsilon)}{\partial x} = \frac{\partial \nu(+0,t,\varepsilon)}{\partial x},\ 0 < t < T;\end{gathered} \qquad (4)$$

Б) Знайти розв'язок системи диференціальних рівнянь

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a(x,t)u = f(x,t) \text{ в } D_1,\\ \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} - b(x,t)\nu = g(x,t) \text{ в } D_2\end{gathered} \qquad (5)$$

за виконання початкової умови

$$u(x,0,\varepsilon) = 0,\ -1 < x < 0, \qquad (6)$$

граничних умов

$$u(-1,t,\varepsilon) = 0,\ \nu(1,t,\varepsilon) = 0,\ 0 < t < T \qquad (7)$$

та умов спряження

$$\begin{gathered}u(-0,t,\varepsilon) = \nu(+0,t,\varepsilon),\\ \frac{\partial u(-0,t,\varepsilon)}{\partial x} = \frac{\partial \nu(+0,t,\varepsilon)}{\partial x},\ 0 < t < T,\end{gathered} \qquad (8)$$

В) Знайти розв'язок системи диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a(x,t)u = f(x,t) \text{ в } D_1,$$
$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} - c(x,t)\frac{\partial \nu}{\partial x} - b(x,t)\nu = g(x,t) \text{ в } D_2 \tag{9}$$

за виконання початкової умови

$$u(x,0,\varepsilon) = 0, \ -1 < x < 0, \tag{10}$$

граничних умов

$$u(-1,t,\varepsilon) = 0, \ \nu(1,t,\varepsilon) = 0, \ 0 < t < T \tag{11}$$

та умов спряження

$$u(-0,t,\varepsilon) = \nu(+0,t,\varepsilon),$$
$$\frac{\partial u(-0,t,\varepsilon)}{\partial x} = \frac{\partial \nu(+0,t,\varepsilon)}{\partial x}, \ 0 < t < T, \tag{12}$$

де t у другому рівнянні (5) і (9) – параметр.

Вважаємо також, що виконуються такі умови:

1) Функції, що входять у (1), (5) і (9) $a(x,t)$, $b(x,t)$, $c(x,t)$, $f(x,t)$ та $g(x,t)$ достатньо гладкі. Їхня гладкість зв'язана з порядком асимптотики N (див. нижче);

2) $a(x,t) \geq \alpha > 0$ в D_1, $b(x,t) \geq \beta > 0$ в D_2, $c(x,t) \geq \gamma > 0$ в D_2, $c(x,t) - \dfrac{\partial b(x,t)}{\partial x} \geq \delta > 0$ в D_2.

За цих умов кожна з задач (1)–(4); (5)–(8); (9)–(12) має єдиний (класичний) розв'язок.

Метою статті є методом примежового шару [4], [5] побудувати асимптотичне розвинення розв'язків кожної з задач до будь-якого порядку N і довести асимптотичну коректність цього розвинення.

Для отримання асимптотики розв'язків задач (1)–(4), а також (5)–(8) використовується ідея побудови асимптотики розв'язку допоміжної (простішої) задачі для вихідних рівнянь [5].

II. Побудова асимптотик задач

1. Побудуємо формальну асимптотику розв'язку задачі А). Для цього розглянемо допоміжні задачі:

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + a(x,t)y = f(x,t) \text{ в } D_1 \tag{13}$$

з початковою умовою

$$y(x,0,\varepsilon) = 0, \ -1 < x < 0 \tag{14}$$

і граничними умовами

$$y(-1,t,\varepsilon) = 0, \ \frac{\partial y(0,t,\varepsilon)}{\partial x} = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i A_i(t), \ 0 < t < T; \tag{15}$$

а також:

$$\frac{\partial z}{\partial t} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + b(x,t)z = g(x,t) \text{ в } D_2 \tag{16}$$

з початковою умовою

$$z(x,0,\varepsilon) = 0, \ 0 < x < 1 \tag{17}$$

і граничними умовами

$$\frac{\partial z(0,t,\varepsilon)}{\partial x} = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i A_i(t), \ z(1,t,\varepsilon) = 0, \ 0 < t < T, \tag{18}$$

де $A_i(t)$, $i = \overline{0,N}$ – невідомі функції, $A_i(0) = 0$, $i = \overline{0,N}$.

Формальну асимптотику розв'язку задачі (13)–(15) шукаємо у вигляді:

$$y(x,t,\varepsilon) = \textstyle\sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i y_i(x,t) + \sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i \Pi_i(\xi,t) +$$
$$+ \varepsilon \textstyle\sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i Q_i(\eta,t), \ (x,t) \in D_1, \tag{19}$$

де N – натуральне число – порядок асимптотики, $y_i(x,t)$, $i = \overline{0,N}$ – функції регулярної частини асимптотики, $\Pi_i(\xi,t)$, $Q_i(\eta,t), i = \overline{0,N}$ – функції примежового шару в околах точок $x = -1$ і $x = 0$ відповідно, $\xi = \dfrac{x+1}{\varepsilon}$, $\eta = -\dfrac{x}{\varepsilon}$ – регуляризуючі перетворення.

Запишемо задачі, з яких визначаються функції, що входять у співвідношення (19). Вони визначаються стандартно.

Функції регулярної частини асимптотики $y_i(x,t)$, $i = \overline{0,N}$ є достатньо гладкі при $-1 \leq x \leq 0$ і їхня сума задовольняє рівняння (13) (з деякою точністю) і початкову умову (14).

Функції $y_i(x,t), i{=}\overline{0,N}$ є розв'язками задач Коші:

$$\frac{\partial y_i}{\partial t} + a(x,t)y_i = f_i(x,t), \ i = \overline{0,N}, \tag{20}$$

$$y_i(x,0) = 0, \ i = \overline{0,N}, \tag{21}$$

де $f_0(x,t) \equiv f(x,t), f_1(x,t) \equiv 0, f_i(x,t) \equiv \dfrac{\partial^2 y_{i-2}}{\partial x^2}$, $i = \overline{2,N}$.

Функції примежового шару $\Pi_i(\xi,t)$, $i = \overline{0,N}$, використовуємо для того, щоб разом з функціями регулярної частини асимптотики $y_i(x,t)$, $i = \overline{0,N}$, задовольнити граничну умову $y(-1,t,\varepsilon) = 0$.

Функції $\Pi_i(\xi,t)$, $i = \overline{0,N}$ визначаються в околі $x = -1$ як розв'язки таких задач:

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial t} - \frac{\partial^2 \Pi_i}{\partial \xi^2} + a(-1,t)\Pi_i = \varphi_i(\xi,t), \ i = \overline{0,N}, \tag{22}$$

$$\Pi_i(\xi,0) = 0, \ i = \overline{0,N}, \tag{23}$$

$$\Pi_i(0,t) = -y_i(-1,t), \ i = \overline{0,N}, \tag{24}$$

$$\Pi_i(\xi,t) \to 0, \text{ при } \xi \to \infty, \ i = \overline{0,N}, \tag{25}$$

де $\varphi_0(\xi,t) \equiv 0$, $\varphi_i(\xi,t)$, $i = \overline{1,N}$, виписуються у явному вигляді і залежать лінійно від $\Pi_j(\xi,t)$, $j < i$.

Функції $\Pi_i(\xi,t)$, $i = \overline{0,N}$ є розв'язками першої граничної задачі для параболічного рівняння другого порядку (22)–(25) і визначаються, з урахуванням вже знайдених функцій $y_i(x,t)$, $i = \overline{0,N}$, рекурентно. Умови (25) – це додаткові умови, що забезпечують примежовий характер функцій $\Pi_i(\xi,t)$, $i = \overline{0,N}$.

Тут і нижче всі функції примежового шару домножуються на зрізаючі функції [4] і за ними зберігаються старі позначення.

Розв'язки задач (22)–(24) записуються у явному вигляді [6]. Крім того показано, що $\Pi_i(\xi,t),\ i=\overline{0,N}$ – функції примежового шару в околі точки $x=-1$.

Функції примежового шару $Q_i(\eta,t),\ i=\overline{0,N}$ слугують для того, щоб разом з функціями регулярної частини асимптотики $y_i(x,t),\ i=\overline{0,N}$ задовольнити граничну умову $\dfrac{\partial y(0,t,\varepsilon)}{\partial x}=\sum\limits_{i=0}^{N}\varepsilon^i A_i(t)$.

Функції примежового шару $Q_i(\eta,t),\ i=\overline{0,N}$ в околі $x=0$ є розв'язками таких задач:

$$\frac{\partial Q_i}{\partial t}-\frac{\partial^2 Q_i}{\partial \eta^2}+a(0,t)Q_i=\psi_i(\eta,t),\ i=\overline{0,N},\qquad(26)$$

$$Q_i(\eta,0)=0,\ i=\overline{0,N},\qquad(27)$$

$$\frac{\partial Q_i(0,t)}{\partial \eta}=\frac{\partial y_i(0,t)}{\partial x}-A_i(t),\ i=\overline{0,N},\qquad(28)$$

$$Q_i(\eta,t)\to 0,\ \text{при}\ \eta\to\infty,\ i=\overline{0,N},\qquad(29)$$

де $\psi_0(\eta,t)\equiv 0,\ \psi_i(\eta,t),\ i=\overline{1,N}$, мають явний вигляд і залежать лінійно від $Q_j(\eta,t),\ j<i,\ A_i(t)$ – невідомі функції.

Отже, функції $Q_i(\eta,t),\ i=\overline{0,N}$, є розв'язками другої граничної задачі для параболічного рівняння другого порядку (26)–(29) і визначаються, з урахуванням вже знайдених функцій $y_i(x,t),\ i=\overline{0,N}$, рекурентно. Умови (29) – це додаткові умови, що забезпечують примежовий характер функцій $Q_i(\eta,t)$, $i=\overline{0,N}$.

Розв'язки задач (26)–(29) записуються у явному вигляді [6]. Крім того, показано, що $Q_i(\eta,t),\ i=\overline{0,N}$, – функції примежового шару в околі точки $x=0$.

Отже, можна вважати, що формальне асимптотичне розвинення розв'язку задачі (13)–(15), побудовано. Залишається знайти невідомі функції $A_i(t)$, $i=\overline{0,N}$.

Формальну асимптотику розв'язку задачі (16)–(18) шукаємо у вигляді

$$\begin{aligned}z(x,t,\varepsilon)&=\textstyle\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i z_i(x,t)+\varepsilon\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i\widetilde{\Pi}_i(\widetilde{\xi},t)+\\&+\textstyle\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i\widetilde{Q}_i(\widetilde{\eta},t),\ (x,t)\in D_2,\end{aligned}\qquad(30)$$

де $z_i(x,t),\ i=\overline{0,N}$, – функції регулярної частини асимптотики; $\widetilde{\Pi_i}(\widetilde{\xi},t),\ \widetilde{Q_i}(\widetilde{\eta},t),\ i=\overline{0,N}$ – функції примежового шару в околах точок $x=0$ і $x=1$ відповідно; $\widetilde{\xi}=\dfrac{x}{\varepsilon},\ \widetilde{\eta}=\dfrac{1-x}{\varepsilon}$ – регуляризуючі перетворення.

Провівши аналогічні перетворення для задачі (13)–(15), отримаємо формальне асимптотичне розвинення розв'язку задачі (16)–(18), яке також містить невідомі функції $A_i(t),\ i=\overline{0,N}$.

Для знаходження функцій $A_i(t),\ i=\overline{0,N}$, використаємо явний вигляд асимптотичних розвинень розв'язків задач (13)–(15) та (16)–(18), а також $y(-0,t,\varepsilon)=z(-0,t,\varepsilon)$:

$$\begin{aligned}&y_i(0,t)-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{\frac{\partial y_i(0,\tau)}{\partial x}-A_i(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\cdot e^{-\int_\tau^t a(0,s)ds}d\tau=\\&=z_i(0,t)-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{A_i(\tau)-\frac{\partial z_i(0,\tau)}{\partial x}}{\sqrt{t-\tau}}\cdot e^{-\int_\tau^t b(0,s)ds}d\tau,\\&i=\overline{0,N}\end{aligned}\qquad(31)$$

Провівши елементарні перетворення у формулі (31), отримаємо рівняння для знаходження $A_i(t)$, $i=\overline{0,N}$

$$\int_0^t A_i(\tau)\frac{K(t,\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau=f(t),\qquad(32)$$

де

$$K(t,\tau)=e^{-\int_\tau^t a(0,s)ds}+e^{-\int_\tau^t b(0,s)ds},\qquad(33)$$

$$\begin{aligned}f(t)&=\sqrt{\pi}(z_i(0,t)-y_i(0,t))+\\&+\int_0^t\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\left(\frac{\partial y_i(0,\tau)}{\partial x}e^{-\int_\tau^t a(0,s)ds}+\right.\\&\left.+\frac{\partial z_i(0,\tau)}{\partial x}e^{-\int_\tau^t b(0,s)ds}\right)d\tau.\end{aligned}\qquad(34)$$

Це інтегральне рівняння Вольтерра першого роду зі слабкою особливістю. Однозначна розв'язальність рівняння (32) показана у [9].

Отже, ми отримали формальне асимптотичне розвинення розв'язку задачі (1)–(4).

2. Побудуємо формальну асимптотику розв'язку задачі Б). Для цього розглянемо допоміжні задачі: (13)–(15), а також

$$\varepsilon^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-b(x,t)z=g(x,t)\ \text{в}\ D_2\qquad(35)$$

з граничними умовами (18).

Формальне асимптотичне розвинення розв'язку задачі (13)–(15), яке містить невідомі функції $A_i(t),\ i=\overline{0,N}$, побудовано раніше.

Формальну асимптотику розв'язку задачі (35), (18) шукаємо у вигляді

$$\begin{aligned}z(x,t,\varepsilon)&=\textstyle\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i z_i(x,t)+\varepsilon\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i\widetilde{\Pi}_i(\widetilde{\xi},t)+\\&+\textstyle\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i\widetilde{Q}_i(\widetilde{\eta},t),\ (x,t)\in D_2,\end{aligned}\qquad(36)$$

де $z_i(x,t),\ i=\overline{0,N}$ – функції регулярної частини асимптотики; $\widetilde{\Pi_i}(\widetilde{\xi},t)$ і $\widetilde{Q_i}(\widetilde{\eta},t),\ i=\overline{0,N}$ – функції примежового шару в околах точок $x=0$ і $x=1$ відповідно; $\widetilde{\xi}=\dfrac{x}{\varepsilon}$ і $\widetilde{\eta}=\dfrac{1-x}{\varepsilon}$ – регуляризуючі перетворення.

Функції регулярної частини асимптотики $z_i(x,t),\ i=\overline{0,N}$ є достатньо гладкі при $0\le x\le 1$ і їхня сума задовольняє рівняння (35) (з деякою точністю).

Функції $z_i(x,t)$, $i=\overline{0,N}$ є розв'язками лінійних рівнянь. Вони виражаються рекурентно і мають вигляд

$$z_0(x,t)=\frac{g(x,t)}{b(x,t)},\ z_i(x,t)=-\frac{\dfrac{\partial^2 z_{i-2}}{\partial x^2}}{b(x,t)}, \tag{37}$$

якщо і – парне число та $z_i(x,t)\equiv 0$, якщо і – непарне число.

Функції примежового шару $\widetilde{\Pi}_i(\widetilde{\xi},t)$, $i=\overline{0,N}$ слугують для того, щоб разом з функціями регулярної частини асимптотики $z_i(x,t)$, $i=\overline{0,N}$ задовольнити граничну умову $\dfrac{\partial z(0,t,\varepsilon)}{\partial x}=\sum\limits_{i=0}^{N}\varepsilon^i A_i(t)$.

Функції $\widetilde{\Pi}_i(\widetilde{\xi},t)$, $i=\overline{0,N}$, визначаються в околі точки $x=0$ як розв'язки таких задач:

$$\frac{\partial^2\widetilde{\Pi}_i}{\partial\widetilde{\xi}^2}-b(0,t)\widetilde{\Pi}_i=\psi_i(\widetilde{\xi},t),\ i=\overline{0,N}, \tag{38}$$

$$\frac{\partial\widetilde{\Pi}_i(0,t)}{\partial\widetilde{\xi}}=A_i(t)-\frac{\partial z_i(0,t)}{\partial x},\ i=\overline{0,N}, \tag{39}$$

$$\widetilde{\Pi}_i(\widetilde{\xi},t)\to 0,\ \text{при}\ \widetilde{\xi}\to\infty,\ i=\overline{0,N}, \tag{40}$$

де $\psi_0(\widetilde{\xi},t)=0, \psi_i(\widetilde{\xi},t),\ i=\overline{1,N}$ – легко виписуються у явному вигляді і залежать лінійно від $\widetilde{\Pi}_j(\widetilde{\xi},t)$, $j<i$, $A_i(t)$ – невідомі функції.

Отже, функції $\widetilde{\Pi}_j(\widetilde{\xi},t)$, $i=\overline{0,N}$ є розв'язками звичайного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Вони записуються явно, виражаються рекурентно з урахуванням вже знайдених функцій $z_i(x,t)$, $i=\overline{0,N}$ і, очевидно, враховуючи припущення 2), є функціями примежового шару.

Функції $\widetilde{Q}_i(\widetilde{\eta},t)$, $i=\overline{0,N}$ в околі точки $x=1$ визначаються як розв'язки таких задач:

$$\frac{\partial^2\widetilde{Q}_i}{\partial\widetilde{\eta}^2}-b(0,t)\widetilde{Q}_i=\theta_i(\widetilde{\eta},t),\ i=\overline{0,N}, \tag{41}$$

$$\widetilde{Q}_i(0,t)=-z_i(1,t),\ i=\overline{0,N}, \tag{42}$$

$$\widetilde{Q}_i(\widetilde{\eta},t)\to 0,\ \text{при}\ \widetilde{\eta}\to\infty,\ i=\overline{0,N}, \tag{43}$$

де $\theta_0(\widetilde{\eta},t)\equiv 0,\ \theta_i(\widetilde{\eta},t)$, $i=\overline{1,N}$ – легко виписуються у явному вигляді і залежать лінійно від $\widetilde{Q}_j(\widetilde{\eta},t)$, $j<i$.

Функції $\widetilde{Q}_i(\widetilde{\eta},t)$, $i=\overline{0,N}$ також є розв'язками звичайного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Вони записуються явно, виражаються рекурентно з урахуванням вже знайдених функцій $z_i(x,t)$, $i=\overline{0,N}$ і враховуючи, що $b(x,t)\geq\beta>0$ в D_2, є функціями примежового шару.

Отже, ми отримали формальне асимптотичне розвинення розв'язку задачі (35), (17), (18), яке містить невідомі функції $A_i(t)$, $i=\overline{0,N}$.

Провівши такі самі перетворення, як для розв'язків задач (13)–(15) та (16)–(18), використавши умову $y(-0,t,\varepsilon)=z(-0,t,\varepsilon)$, отримаємо рівняння для знаходження $A_i(t)$, $i=\overline{0,N}$

$$A_i(t)=\int_0^t A_i(\tau)\frac{K(t,\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau+f(t), \tag{44}$$

де $K(t,\tau)$, $f(t)$ – легко записуються у явному вигляді і $K(t,\tau)$ – неперервна функція. Це інтегральне рівняння Вольтерра другого роду зі слабкою особливістю відносно $A_i(t)$, $i=\overline{0,N}$. Його однозначна розв'язальність показана у [9].

Отже, ми отримали формальне асимптотичне розвинення розв'язку задачі (5)–(8).

3. Формальну асимптотику розв'язку задачі B) шукаємо у вигляді

$$\begin{gathered}u(x,t,\varepsilon)=\textstyle\sum_{i=0}^N\varepsilon^i u_i(x,t)+\sum_{i=0}^N\varepsilon^i\Pi_i(\xi,t)+\\ +\textstyle\sum_{i=0}^N\varepsilon^i Q_i(\eta,t),\ (x,t)\in D_1,\end{gathered} \tag{45}$$

$$\nu(x,t,\varepsilon)=\sum_{i=0}^N\varepsilon^i\nu_i(x,t)+\sum_{i=0}^N\varepsilon^i P_i(\gamma,t),\ (x,t)\in D_2, \tag{46}$$

де $u_i(x,t)$, $\nu_i(x,t)$, $i=\overline{0,N}$ – функції регулярної частини асимптотики; $\Pi_i(\xi,t)$, $Q_i(\eta,t)$, $P_i(\gamma,t)$, $i=\overline{0,N}$ – функції примежового шару в околах точок $x=-1$, $x=0$ і $x=1$ відповідно; $\xi=\dfrac{x+1}{\varepsilon}$, $\eta=-\dfrac{x}{\varepsilon}$ і $\gamma=\dfrac{1-x}{\varepsilon^2}$ – регуляризуючі перетворення.

Випишемо задачі, з яких визначаються функції, що входять у (45) і (46). Вони визначаються стандартно.

Функції регулярної частини асимптотики $u_i(x,t)$, $i=\overline{0,N}$ є достатньо гладкі при $-1\leq x\leq 0$ і їхня сума задовольняє (з деякою точністю) перше рівняння (9) і початкову умову (10).

Функції $u_i(x,t)$, $i=\overline{0,N}$ є розв'язками задачі Коші (20)–(21), легко записуються у явному вигляді і виражаються рекурентно.

Функції регулярної частини асимптотики $\nu_i(x,t)$, $i=\overline{0,N}$ є достатньо гладкі при $0\leq x\leq 1$ і їхня сума задовольняє (з деякою точністю) друге рівняння (9).

Функція $\nu_0(x,t)$ задовольняє при $x=0$ умову $u_0(x,t)=\nu_0(x,t)$.

Функції $\nu_i(x,t)$ задовольняють при $x=0$ умови $\nu_i(x,t)=u_i(x,t)+Q_i(\eta,t)$, $i=\overline{1,N}$. Зауважимо, що функція $Q_0(\eta,t)\equiv 0$.

Функції регулярної частини асимптотики $\nu_i(x,t)$, $i=\overline{0,N}$ є розв'язками задачі Коші:

$$\frac{\partial\nu_i}{\partial x}+\frac{b(x,t)}{c(x,t)}\nu_i=g_i(x,t),\ i=\overline{0,N}, \tag{47}$$

$$\nu_i(0,t)=u_i(0,t)+Q_i(0,t),\ i=\overline{1,N}, \tag{48}$$

де $g_0(x,t)\equiv-\dfrac{g(x,t)}{c(x,t)}$, $g_1(x,t)\equiv 0$, $g_i(x,t)\equiv\dfrac{\dfrac{\partial^2\nu_{i-2}}{\partial x^2}}{c(x,t)}$, $i=\overline{2,N}$.

Функції примежового шару $\Pi_i(\xi,t),\ i=\overline{0,N}$ використовуємо для того, щоб разом з функціями регулярної частини асимптотики $u_i(x,t),\ i=\overline{0,N}$ задовольнити граничну умову $u(-1,t)=0$.

Функції $\Pi_i(\xi,t),\ i=\overline{0,N}$ є розв'язками першої граничної задачі для параболічного рівняння другого порядку (22)–(24) і є функціями примежового шару в околі $x=-1$.

Функції примежового шару $Q_i(\eta,t),\ i=\overline{1,N}$ в околі $x=0$ є розв'язки таких задач:

$$\frac{\partial Q_i}{\partial t}-\frac{\partial^2 Q_i}{\partial \eta^2}+a(0,t)Q_i=\psi_i(\eta,t),\ i=\overline{1,N}, \tag{49}$$

$$Q_i(\eta,0)=0,\ i=\overline{1,N}, \tag{50}$$

$$\frac{\partial Q_i(0,t)}{\partial \eta}=\frac{\partial \nu_{i-1}(0,t)}{\partial x}-\frac{\partial u_{i-1}(0,t)}{\partial x},\ i=\overline{1,N}, \tag{51}$$

$$Q_i(\eta,t)\to 0,\ \text{при}\ \eta\to\infty,\ i=\overline{1,N}, \tag{52}$$

де $\psi_i(\xi,t),\ i=\overline{1,N}$ – мають явний вигляд і залежать лінійно від $Q_j(\eta,t),\ j<i$.

Отже, функції $Q_i(\eta,t),\ i=\overline{0,N}$ є розв'язками другої граничної задачі для параболічного рівняння другого порядку (49)–(52) і визначаються рекурентно. Умови (33) – додаткові умови, що забезпечують примежовий характер функцій $Q_i(\eta,t),\ i=\overline{1,N}$.

Розв'язок задачі (49)–(52) записується у явному вигляді [6]. Можна показати, що $Q_i(\eta,t),\ i=\overline{0,N}$ – функції примежового шару в околі точки $x=0$.

Функції примежового шару $P_i(\gamma,t),\ i=\overline{0,N}$ використовуємо для того, щоб разом з функціями регулярної частини асимптотики $\nu_i(x,t)$ задовольнити граничну умову $\nu(1,t)=0$.

Функції $P_i(\gamma,t),\ i=\overline{0,N}$ в околі $x=1$ є розв'язками таких задач:

$$\frac{\partial^2 P_i(\gamma,t)}{\partial \gamma^2}+c(1,t)\frac{\partial P_i(\gamma,t)}{\partial \gamma}=\varphi_i(\gamma,t),\ i=\overline{0,N}, \tag{53}$$

$$P_i(0,t)=-\nu_i(1,t), \tag{54}$$

$$P_i(\gamma,t)\to 0,\ \text{при}\ \gamma\to\infty,\ i=\overline{0,N}, \tag{55}$$

де $\varphi_0(\gamma,t)\equiv 0,\ i=\overline{0,1},\ \varphi_i(\gamma,t),\ i=\overline{2,N}$ – легко виписуються у явному вигляді і залежать лінійно від $P_j(\gamma,t),\ j<i$.

Отже, функції $P_i(\gamma,t),\ i=\overline{0,N}$ є розв'язками неоднорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Умови (55) забезпечують примежовий характер функцій $P_i(\gamma,t)$, $i=\overline{0,N}$.

Розв'язок задачі (53)–(55) записується у явному вигляді і має примежовий характер. Отже, ми отримали формальне асимптотичне розвинення розв'язку задачі (9)–(12).

III. Оцінка залишкових членів

Враховуючи, що знайдені формальні асимптотичні розвинення наближають розв'язки задач А), Б) і В) до порядку N, то в асимптотиках є ще доданки, що містять ε у степені $N+1$ і вище. Позначимо їх через $\varepsilon^{N+1}R_N$ в області D_1 і $\varepsilon^{N+1}\overline{R}_N$ в області D_2 та називаємо залишковими членами асимптотики.

Звичайним способом ми отримаємо задачі для оцінки функцій $R_N(x,t,\varepsilon)$ і $\overline{R}_N(x,t,\varepsilon)$, подібні до вихідних.

1. Для оцінки залишкових членів задачі А) отримаємо рівняння

$$\frac{\partial R_N}{\partial t}-\varepsilon^2\frac{\partial^2 R_N}{\partial x^2}+a(x,t)R_N=\omega(x,t)\ \text{в}\ D_1,$$
$$\frac{\partial \overline{R}_N}{\partial t}-\varepsilon^2\frac{\partial^2 \overline{R}_N}{\partial x^2}+b(x,t)\overline{R}_N=\varpi(x,t)\ \text{в}\ D_2; \tag{56}$$

початкові умови

$$R_N(x,0,\varepsilon)=0,\ -1<x<0,\ \overline{R}_N(x,0,\varepsilon)=0,\ 0<x<1; \tag{57}$$

граничні умови

$$R_N(-1,t,\varepsilon)=0,\ \overline{R}_N(1,t,\varepsilon)=0,\ 0<t<T; \tag{58}$$

умови спряження

$$\begin{gathered} R_N(-0,t,\varepsilon)=\overline{R}_N(+0,t,\varepsilon),\\ \frac{\partial R_N(-0,t,\varepsilon)}{\partial x}=\frac{\partial \overline{R}_N(+0,t,\varepsilon)}{\partial x},\ 0<t<T, \end{gathered} \tag{59}$$

де функціЇ $\omega(x,t)$ і $\varpi(x,t)$ мають явний вигляд і обмежені за нормою L_2 в областях відповідно D_1 і D_2.

Оцінку отримаємо методом інтегралів енергії [10]. Для цього домножимо кожне з рівнянь (56) відповідно на $2R_N$ і $2\overline{R}_N$ та зводячи до дивергентного вигляду, отримаємо

$$\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial t}(R_N^2)+\frac{\partial}{\partial x}\left(-2\varepsilon^2\frac{\partial R_N}{\partial x}R_N\right)+2\varepsilon^2\left(\frac{\partial R_N}{\partial x}\right)^2+\\ +2a(x,t)R_N^2=2\omega(x,t)R_n\ \text{в}\ D_1,\\ \frac{\partial}{\partial t}(\overline{R}_N^2)+\frac{\partial}{\partial x}\left(-2\varepsilon^2\frac{\partial \overline{R}_N}{\partial x}\overline{R}_N\right)+\\ +2\varepsilon^2\left(\frac{\partial \overline{R}_N}{\partial x}\right)^2+2a(x,t)\overline{R}_N^2=2\varpi(x,t)\overline{R}_n\ \text{в}\ D_2. \end{gathered} \tag{60}$$

Проінтегруємо кожне з рівнянь (60) по областях D_1 і D_2 відповідно, використовуючи формулу Гаусса–Остроградського і умови (57)–(58), та додамо їх. Після простих перетворень, з урахуванням умов (59), отримаємо

$$\begin{gathered} \alpha\left(\iint\limits_{D_1} R_N^2dxdt+\iint\limits_{D_2}\overline{R}_N^2dxdt\right)\le\\ \le\iint\limits_{D_1}\omega(x,t)R_Ndxdt+\iint\limits_{D_2}\varpi(x,t)\overline{R}_Ndxdt, \end{gathered} \tag{61}$$

де $\alpha = \left(\min\limits_{(x,t)\in D_1} a(x,t), \ \min\limits_{(x,t)\in D_2} b(x,t) \right)$.

Оцінюючи праву частину нерівності (61) за допомогою нерівності Коші з параметром $A \cdot B \leq \leq \frac{1}{2}\left(A^2\mu + \frac{B^2}{\mu} \right)$, $\mu > 0$ і вибираючи параметр μ так, щоб $\mu < \frac{\alpha}{2}$, маємо

$$\frac{\alpha}{2}\left(\iint\limits_{D_1} R_N^2 dxdt + \iint\limits_{D_2} \overline{R}_N^2 dxdt \right) \leq \leq \frac{1}{\mu}\iint\limits_{D_1} \omega^2(x,t)dxdt + \frac{1}{\mu}\iint\limits_{D_2} \varpi^2(x,t)dxdt. \quad (62)$$

Звідси випливає обмеженість функцій R_N і $\overline{R}_N$ за нормою L_2 у відповідних областях.

2. Для оцінки залишкового члена задачі Б) отримуємо рівняння

$$\frac{\partial R_N}{\partial t} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 R_N}{\partial x^2} + a(x,t)R_N = \omega(x,t) \text{ в } D_1, \quad (63)$$
$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2 \overline{R}_N}{\partial x^2} - b(x,t)\overline{R}_N = \varpi(x,t) \text{ в } D_2;$$

початкову умову

$$R_N(x,0,\varepsilon) = 0; \ -1 < x < 0; \quad (64)$$

граничні умови

$$R_N(-1,t,\varepsilon) = 0, \ \overline{R}_N(1,t,\varepsilon) = 0, \ 0 < t < T; \quad (65)$$

умови спряження

$$R_N(-0,t,\varepsilon) = \overline{R}_N(+0,t,\varepsilon),$$
$$\frac{\partial R_N(-0,t,\varepsilon)}{\partial x} = \frac{\partial \overline{R}_N(+0,t,\varepsilon)}{\partial x}, \ 0 < t < T. \quad (66)$$

Провівши перетворення, як і у попередньому випадку, отримаємо нерівність (61), де $\alpha = \left(\min\limits_{(x,t)\in D_1} a(x,t), \ \min\limits_{(x,t)\in D_2} c(x,t) \right)$, що так само приводить до обмеженості R_N і $\overline{R}_N$ за нормою L_2 у відповідних областях. Міркуючи подібно до попереднього, отримаємо аналогічну оцінку.

3. Для оцінки залишкових членів задачі В) отримаємо рівняння

$$\frac{\partial R_N}{\partial t} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 R_N}{\partial x^2} + a(x,t)R_N = \omega(x,t) \text{ в } D_1, \quad (67)$$
$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2 \overline{R}_N}{\partial x^2} - c(x,t)\frac{\partial \overline{R}_N}{\partial x} - b(x,t)\overline{R}_N = \varpi(x,t) \text{ в } D_2$$

з початковою умовою (64), граничними умовами (65) та умовами спряження (66).

Провівши аналогічні з задачею А) перетворення, отримаємо нерівність (61), де $\alpha = \left(\min\limits_{(x,t)\in D_1} a(x,t), \ \min\limits_{(x,t)\in D_2} \left(c(x,t) - \frac{\partial b(x,t)}{\partial x} \right) \right)$, що так само приводить до обмеженості R_N і $\overline{R}_N$ в L_2-нормі у відповідних областях.

Висновки

Результат роботи можна сформулювати у вигляді.

Теорема 1. *Припустимо, що виконуються умови 1), 2). Тоді розв'язки задач (1)–(4); (5)–(8) і (9)–(12) допускають асимптотичне розвинення довільного порядку N вигляду (19), (30); (19), (36); (45), (46) з доданками $\varepsilon^{N+1}R_N$ в області D_1 і $\varepsilon^{N+1}\overline{R}_N$ в області D_2 відповідно. Усі функції, що у них входять, отримуються рекурентно у явному вигляді. Функції $A_i(t)$, $i = \overline{0, N}$, що входять у асимптотику задач пунктів 1, 2 розділу III, знаходяться як розв'язки інтегральних рівнянь Вольтерра першого роду зі слабкою особливістю вигляду (32) та інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду зі слабкою особливістю вигляду (44) відповідно. Залишкові члени розвинень є порядку ε^{N+1} у L_2 -нормі у відповідних областях.*

Зауваження 1. Результат пункту 3 розділу III узагальнює результат роботи [8] на випадок скінченних областей.

Зауваження 2. Результати роботи анонсовано у [11]–[14].

Література

[1] Вишик М.И., Люстерник Л.А. Асимптотическое поведение решений линейных дифференциальных уравнений с большими или быстро меняющимися коэффициентами и граничными условиями с малым параметром. // УМН, 1960. – 15, № 4. – С. 27–95.

[2] Lions I.L. Perturbations singulières dans les problémes aux limites et en contr?le optimal // Lect. Notes Math., 323, 12, 1973. – 540 p.

[3] Morosanu G., Barbu L. Singularly perturbed boundary value problems. - Basel-Boston-Berlin:Biekhäuser, 2007.– 230 p.

[4] Вишик М.И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. – 1957. – 12, № 5. – С. 3–122.

[5] Васильева А. Б, Бутузов В. Ф. Асимптотические ра-

зложения решений сингулярно возмущенных уравнений. – М.: Наука, 1973. – 272 с.

[6] Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. – М.: Наука, 1979. – 685 с.

[7] Треногин В.А. Развитие и приложение асимптотического метода Люстерника-Вишика // Успехи мат. наук. – 1970. – 25, Вып. 4. – С. 123–156.

[8] Сушко В.Г. Асимптотические решения некоторых сингулярно возмущенных уравнений смешанного типа. // Фундаментальная и прикладная математика, 1997. – 3. № 2 – С. 579–586.

[9] Манжиров А.В., Полянин А.Д. Справочник по интегральным уравнениям: Методы решения. – М.: Факториал Пресс, 2000. – 384 с.

[10] Курант Р. Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1964. – 830 с.

[11] Хмельовський М.Г., Цимбал В.М. Зауваження щодо побудови асимптотики розв'язків деяких сингулярно збурених задач // Збірник матеріалів 5 міжвузівської науково-технічної конференції науково-педагогічних працівників, березень 2010 р. – Львів, 2010. – С.14–15.

[12] Хмельовський М.Г., Цимбал В.М. Задача спряження деяких сингулярно збурених диференціальних рівнянь другого порядку // Матеріали тринадцятої міжнародної конференції імені академіка М. Кравчука 13–15 травня 2010 р. – К., 2010. – с. 416.

[13] Хмельовський М.Г., Цимбал В.М. Задача спряження сингулярно збурених параболічних диференціальних рівнянь другого порядку // Збірник матеріалів 13 міжвузівської науково-технічної конференції науково-педагогічних працівників 20–21 березня 2009 р. – Львів, 2009. – с. 12.

[14] Волошин В.В., Флюд В.М., Хмельовський М.Г., Цимбал В.М. Сингулярно збурені нелокальні задачі та задачі спряження для диференціальних рівнянь Український математичний конгрес. – К.: Інститут математики НАН України, 27–29 серпня 2009 р. http://www.imath.kiev.ua/ congress2009/ partUMC2009.html

ЗАДАЧА СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ

М.Г. Хмелёвский[a], В.Н. Цымбал[a,b]

[a] *Национальный университет "Львивсъка политехника", ул. С. Бандеры, 12, Львов, 79013, Украина*
[b] *Львовский национальний университет имени Ивана Франко ул. Университетская, 1, Львов, 79001, Украина*

Построены асимптотические разложения решения задач сопряжения для сингулярно возмущенных параболических уравнений второго порядка, а также этих уравнений и сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

Ключевые слова: задача сопряжения, сингулярное возмущение, параболическое уравнение, пограничный слой, асимптотическое разложение.

2000 MSC: 35K20, 35B25

УДК: 517.955.8

CONJUGATION PROBLEM TO SOME SINGULARLY PERTURBED EQUATIONS

M.G. Khmelyovsky[a], V.M. Tsymbal[a, b]

[a] *National University "Lvivska Politechnika" 12 S. Bandera Str., 79013, Lviv, Ukraine*
[b] *Lviv Nacional University named after Ivan Franko Universitetska Str., 79000, Lviv, Ukraine*

Asymptotic expansions of the solutions to the transmission problem for the second order singularly perturbed parabolic equations and these ones and the second order singularly perturbed ordinary differential equations are constructed.

Key words: transmission problem, singular perturbation, parabolic equation, boundary layer, asymptotic expansion.

2000 MSC: 35K20, 35B25

УДК: 517.955.8