ГЕОДЕЗІЯ

УДК 528.33:551.24

М.М. Фис, В.І. Нікулішин, Р.М. Озімбловський
Національний університет “Львівська політехніка”

ВИКОРИСТАННЯ МНОГОЧЛЕНІВ ЛЕЖАНДРА ДЛЯ АПРОКСИМАЦІЇ ОДНОВИМІРНИХ РОЗПОДІЛІВ ГУСТИНИ МАС ПЛАНЕТ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ЇХ ЗБІЖНОСТІ

Исследовано возможности изображения распределения кусочно-непрерывных функций, представленных по полиномах Лежандра. Описана практическая реализация этой методики и методы ее улучшения.

This paper presents investigation of the image's possibility of distribution of lumply-continuous functions with are presented by Legendre polynomials and practical realization of this technique and methods for its improving were investigated.

Постановка проблеми. Для кусково-неперервних одновимірних модельних розподілів мас (PEM [3], PREM[9]) еліпсоїдальної планети $\delta(\rho)$ $(0 \leq \rho \leq 1)$ алгоритм обчислення інтегральних характеристик (потенціал V, прискорення сили ваги g та гравітаційної енергії E) навіть для сферичних тіл доволі складний, а для еліпсоїдальних планет практично нездійсненний. Тому подання модельних розподілів $\delta(\rho)$ комбінаціями аналітичних виразів, для яких просто знаходять значення V, g, E, є актуальним. Одним з можливих варіантів є використання поліномів Лежандра [2].

Зв’язок із важливими науковими і практичними завданнями. Для еліпсоїдальної планети одновимірний розподіл мас $\delta(\rho)$ визначає тривимірний потенціал V і прискорення сили ваги g, які відіграють важливу роль у дослідженні її внутрішньої структури та обчисленні величини V і g для кусково-неперервної функції $\delta(\rho)$. Такий алгоритм навіть для сферично-симетричного тіла громіздкий [7,11] і ускладнюється у разі врахування еліпсоїдальності. Розрахунок значень гравітаційної енергії E в цьому випадку практично неможливий. Для неперервних аналітичних виразів існує елементарний алгоритм [6] знаходження V,g,E, а розклад густини $\delta(\rho)$ за поліномами Лежандра дає змогу представити їх рядами. Члени таких рядів визначаються дуже просто. Це надалі дає можливість вивчати стан гідростатичної рівноваги планети [4] або відхилення від нього.

Аналіз останніх досліджень та публікацій, у яких вирішується ця проблема. У монографії [4] подано формули для обчислення потенціалу V і прискорення сили ваги. В працях [7, 8] знайдено співвідношення для величин V,g,E для одновимірних та тривимірних розподілів мас еліпсоїдальної планети. Оцінку для сферичного значення потенціалу V подано в статті [5]. В роботі [11] визначено V, g, E для різних сферично-симетричних моделей розподілу мас Землі, а також проаналізовано вплив еліптичності тіла на ці величини. У цій праці запропоновано різні способи представлення густини $\delta(\rho)$ рядами за поліномами Лежандра та досліджено їх збіжность.

Постановка завдання. За заданим розподілом $\delta(\rho)$ знайти його розклад за поліномами Лежандра та дослідити його збіжність.

Виклад основного матеріалу. Функцію розподілу $\delta(\rho)$ ($0 \le \rho \le 1$) продовжуємо на проміжок [–1;1]

$$\delta(\rho) = \delta(-\rho), \tag{1}$$

що дає змогу записати її у вигляді:

$$\delta(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n} P_{2n}(\rho), \tag{2}$$

де

$$C_{2n} = (4n+1)\int_0^1 \delta(\rho) P_{2n}(\rho) d\rho = \sum_{l=0}^{n} d_{2l}^{2n} \mu_{2l}, \tag{3}$$

а

$$\mu_{2l} = \int_0^1 \rho^{2l} \delta(\rho) d\rho \ \text{ – степеневі моменти густини.} \tag{4}$$

Коефіцієнти d_l^t визначаються за рекурентними формулами.

$$\begin{aligned} & d_0^0 = 1, \quad d_0^1 = 0, \quad d_1^1 = 1, \\ & d_{n+1}^{n+1} = \frac{2n+1}{n+1} d_n^n, \quad d_n^{n+1} = \frac{2n+1}{n+1} d_{n-1}^n, \quad (1 \le n \le n_k), \\ & d_i^{n+1} = \frac{2n+1}{n+1} d_{i-1}^n - \frac{n}{n+1} d_{i-1}^{n-1}, \quad d_0 = -\frac{n}{n+1} d_0^{n-1}, \quad (1 \le i \le n-1) \end{aligned} \tag{5}$$

Дослідимо ефективність описаної методики для двох випадків (неперервного і розривного). Розраховуючи коефіцієнти C_{2n} і відповідні поліноми P_{2n}, визначаємо наближені значення густини при різних n і подаємо табл. 1.

Аналіз табл. 1 показує, що збільшення порядку апроксимації уточнює наближені величини до деякого n, а подальше його зростання призводить до спотворення результатів обчислень (очевидно, за рахунок похибок обчислень).

Оптимальну кількість членів суми (2) можна визначити з нерівності Бесселя або рівності Парсеваля для кусково-неперервних функцій [1], яку в нашому випадку запишемо

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{2n}^2}{4n+1} \le \int_0^1 \delta^2(\rho) d\rho . \tag{6}$$

Таблиця 1

Точні та наближені значення густини для різних n, обчислені за (2), (3)

$\delta = 1, \ 0 < \rho \le \frac{1}{2}, \ \delta = 0, \ \frac{1}{2} < \rho \le 1$								$\delta = \sqrt{\rho}$						
ρ	δ \ n	10	20	30	40	50	60	δ \ n	10	20	30	40	50	60
0.0	1.0	0.995	1.023	1.019	1.003	0.991	-3.154	0.0	0.259	0.181	0.147	0.127	0.114	3.310
0.1	1.0	1.006	0.994	0.980	1.000	0.999	-2.780	0.3	0.296	0.281	0.305	0.323	0.327	2.953
0.2	1.0	1.022	0.976	1.022	0.994	1.010	-1.913	0.4	0.395	0.457	0.454	0.439	0.449	1.748
0.3	1.0	1.008	1.030	0.972	1.009	1.008	-1.144	0.5	0.525	0.556	0.543	0.551	0.545	0.546
0.4	1.0	0.927	1.009	1.048	1.012	0.986	-1.075	0.6	0.647	0.621	0.636	0.634	0.630	-0.053
0.5	0.5	0.772	0.752	0.746	0.755	0.751	-2.318	0.7	0.734	0.713	0.705	0.704	0.706	0.261
0.6	0.5	0.583	0.479	0.463	0.497	0.522	-3.940	0.8	0.783	0.776	0.774	0.774	0.774	1.866
0.7	0.5	0.448	0.492	0.507	0.482	0.513	-0.170	0.8	0.819	0.832	0.840	0.839	0.836	3.820
0.8	0.5	0.451	0.512	0.510	0.484	0.508	3.742	0.9	0.880	0.900	0.891	0.897	0.893	-1.176
0.9	0.5	0.554	0.502	0.505	0.502	0.493	6.516	0.9	0.969	0.947	0.945	0.948	0.950	3.629
1.0	0.5	0.366	0.569	0.520	0.434	0.541	44.290	1.0	0.947	1.026	0.983	1.013	0.990	19.714

Таблиця 2

Числові результати використані для двох наведених прикладів, що підтверджують вибір критерію збіжності

δ	$\int_0^1 \delta^2(\rho)d\rho$	$\sum_{l=0}^{n} \frac{C_l^2}{(4l+1)}$					
		40	45	50	52	54	60
$\delta = \begin{cases} 1, & 0 < \rho \le \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} < \rho \le 1 \end{cases}$	0.625	0.62363	0.62356	0.62356	0.62374	0.64812	1.006149
$\delta = \sqrt{\rho}$	0.5	0.49927	0.49643	0.49996	0.52029	0.50871	1.72907

Зменшити порядок апроксимації можна, скориставшись зміщеними многочленами Лежандра[2], які при заміні ρ^2 на $\frac{1}{2}(1+t)$, якщо $(-1 \le t \le 1, \quad 0 \le \rho \le 1)$, дають зображення функції *δ(ρ)* у вигляді

$$\delta(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(2\rho^2 - 1), \tag{7}$$

де

$$C_n = 2(2n+1)\int_0^1 \rho P_n(2\rho^2 - 1)\delta(\rho)d(\rho) = \sum_{l=0}^{n} d_l^n \mu_l', \tag{8}$$

$$\mu_l' = \int_0^1 \delta(\rho)\rho^{2l+1}d\rho \tag{9}$$

Таблиця 3

Порівняння точних і наближених значень густини, отриманих другим способом

$\delta = 1, \quad 0 < \rho \le \frac{1}{2}, \ \delta = 0, \quad \frac{1}{2} < \rho \le 1$								$\delta = \sqrt{\rho}$						
ρ	n / δ	6	12	15	18	21	24	n / δ	6	12	15	18	21	24
0.0	1.0	1.141	0.897	1.085	0.926	1.067	0.939	0.0	0.431	0.303	0.247	0.214	0.191	0.174
0.1	1.0	1.121	0.940	1.019	1.008	0.977	1.026	0.3	0.442	0.337	0.307	0.302	0.305	0.310
0.2	1.0	1.064	1.028	0.958	1.009	1.021	0.981	0.5	0.476	0.426	0.439	0.451	0.452	0.447
0.3	1.0	0.975	1.059	1.027	0.977	0.974	1.006	0.6	0.529	0.538	0.555	0.548	0.545	0.549
0.4	1.0	0.862	0.959	1.020	1.048	1.046	1.026	0.6	0.599	0.639	0.632	0.631	0.634	0.631
0.5	0.5	0.736	0.743	0.745	0.746	0.747	0.747	0.7	0.679	0.714	0.704	0.709	0.706	0.708
0.6	0.5	0.614	0.532	0.478	0.458	0.464	0.485	0.8	0.765	0.772	0.777	0.773	0.775	0.775
0.7	0.5	0.514	0.457	0.496	0.523	0.503	0.484	0.8	0.846	0.832	0.835	0.838	0.837	0.836
0.8	0.5	0.457	0.510	0.507	0.486	0.513	0.493	0.9	0.914	0.898	0.895	0.894	0.894	0.894
0.9	0.5	0.469	0.507	0.503	0.492	0.510	0.491	1.0	0.957	0.949	0.948	0.948	0.948	0.948
1.0	0.5	0.578	0.558	0.549	0.542	0.538	0.535	1.0	0.964	1.013	0.993	1.004	0.997	1.002

Умову оптимального підсумування при цьому запишемо:

$$2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_n^2}{(2n+1)} \le \int_0^1 \sigma^2(\rho)\rho d\rho \qquad (10)$$

Виконуючи такі самі обчислення, як для першого способу, одержимо табл. 3.
Аналогічно визначаємо оптимальну кількість членів, користуючись критерієм (9).

Таблиця 4

Теоретична величина $4\int_0^1 \delta^2(\rho)d\rho$ **і її наближене значення** $2\sum_{l=0}^{n}\frac{C_l^2}{(2l+1)}$

δ	$4\int_0^1 \delta^2(\rho)d\rho$	$2\sum_{l=0}^{n}\frac{C_l^2}{(2l+1)}$				
		15	18	21	24	27
$\delta=\begin{cases}1\\0.5\end{cases}$	0.875	0.870613	0.87132	0.871823	0.87295	0.89150
$\delta=\sqrt{\rho}$	1.333333	1.333322	1.333327	1.333338	1.33536	1.39167

Висновки. Аналіз отриманих результатів показує, що точність обчислення ε (ε ≤0,0001) в першому випадку досягається при n=50, а для другого – за значно менших n (n=21-24), і подальше збільшення кількості членів не дає покращення збіжності. Підвищити точність представлення рядами виду (2) і (7) можна, використовуючи інші способи поліпшення підсумування, наприклад, методами Абеля або Чезаро. Для неперервних функцій апроксимація не завжди краща, ніж для розривних, що ілюструється табл. 1 і 2, тому інколи є ефективним розбиття *δ(ρ)* на дві частини: неперервну і стрибкоподібну, для якої не потрібно робити наближення. Отже, в кожному конкретному випадку спосіб представлення, врахування кількості членів і покращення збіжності потребує конкретних досліджень.

1. Демидович Б.П., Марон Н.А. – Основы вычислительной математики. – М.: Из-во физ.-мат. лит., 1969. – 658 с. 2. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. – Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения. – М.: Наука, 1967. – 368 с. 3. Жарков В.Н., Трубицин В.П. Физика планетарних недр. – М: Наука, 1980. – 448 с. 4. Картвелишвили К.М. Планетарная плотностная модель и нормальное гравитационное поле Земли. – М.: Наука, 1982. – 93 с. 5. Мещеряков Г.А. Задачи теории потенциала и обобщенная земля. – М.: Наука, 1991. – 216 с. 6. Муратов Р.З. Потенциалы элипсоида. – М.: Атомиздат, 1976. – 144 с. 7. Фис М.М., Нікулішин В.І. Про єдиний алгоритм визначення значень густини, потенціалу та енергії одновимірного розподілу мас еліпсоїдальної планети // Геодезія, картографія та аерофотознімання. – 2009. – № 71. 8. Фис М., Нікулішин В., Покотило І., Котик З. Наближення одновимірних розподілів мас еліпсоїдальних тіл рядом по поліномах Лежандра та способи покращення збіжності // Збірник наукових праць “Новітні досягнення геодезії, геоінформатики та землевпорядкування – Європейський досвід”. – 2009. – Чернігів. 9. Dziewonski A.M., Anderson D.L. Preliminary reference Earth model // Physics of the Earth and Planet. Inter., 25, 1981. – P. 297–356. 10. Dziewonski A.M., Halls A.L., Lapwyyd E.R. Parametricaly Simple Earth models, consistent geophysical data. – Phys. Planet. Inter., 10, 1975. – P. 12–48. 11. Marchenko A.N. Zayats A.S. Estimation of the potential gravitational energy of the earth based on reference density models // Геодинамика. – 2008. – № 1(7). – С. 5–24.