ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
Вип.696 № 696, (2011) с. 26–31

JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY
"LVIVSKA POLITECHNIKA"
"Physical & mathematical sciences"
Vol.696 No 696, (2011) 26–31

ПАРАБОЛІЧНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ В ВАГОВИХ ПРОСТОРАХ УЗАГАЛЬНЕНИХ ФУНКЦІЙ

Г.П. Лопушанська[a]

[a] *Львівський національний університет імені Івана Франка*
вул. Університетська 1, 79000, Львів, Україна

(Отримано 27 травня 2010 р.)

Встановлено однозначну розв'язність нормальних лінійних параболічних крайових задач у вагових просторах узагальнених функцій

Ключові слова: нормальна параболічна крайова задача; узагальнена функція; ваговий функційний простір; матриця Гріна; спряжені оператори Гріна

2000 MSC: 2000: 35K55

УДК: 517.95

Вступ

У [1–7] вивчались лінійні крайові задачі для параболічних систем в обмежених областях Q у просторах узагальнених функцій із $D'(\overline{Q})$ та за наявності точкових сильних степеневих особливостей у правих частинах. Точні оцінки розв'язків загальних лінійних параболічних крайових задач у просторах функцій, які можуть мати слабкі особливості при $t=0$, одержані в [8].

Результати [5–7] узагальнюємо на випадок правих частин із ширших вагових просторів узагальнених функцій. У частині II ці простори залежать від крайових умов задачі, у частині III поширюємо результати попереднього розділу на випадок правих частин задачі із вагових просторів узагальнених функцій, що не залежать від крайових умов, як це було зроблено у [7] за наявності точкових степеневих особливостей.

I.

Нехай Ω_0 – область в $\mathbb{R}^n$, обмежена замкненою поверхнею Ω_1 класу C^∞, $Q_i=\Omega_i\times(0,T]$, $i=0,1$, $Q_2=\Omega_0$.

$D(Q_i)=C_0^\infty(Q_i)$, $D(\overline{Q}_i)=C^\infty(\overline{Q}_i)$, $i=0,1,2$,

$D^0(\overline{Q}_i)=\{\varphi\in D(\overline{Q}_i): D_t^k\mid_{t=T}=0,\ k=0,1,\dots\}$, $i=0,1$,

$$L(x,t,D)\equiv D_t-A\equiv D_t-\sum_{|\alpha|\le 2b}a_\alpha(x,t)D_x^\alpha,$$

$$B_j(x,t,D_x)\equiv\sum_{|\alpha|\le r_j}b_{j\alpha}(x,t)D_x^\alpha,\ j=\overline{1,m},\ m=bp,$$

$a_\alpha(x,t)$ – квадратні $p\times p$ матриці з елементами $a_\alpha^{\nu\mu}\in D(\overline{Q}_0)$, $|\alpha|=\alpha_1+\dots+\alpha_n$, $D_t=\frac{\partial}{\partial t}$, $D_x^\alpha=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$, $b_{j\alpha}(x,t)$ – рядки довжини p з елементами з $D(\overline{Q}_1)$, $j=\overline{1,m}$, L – рівномірно параболічний за Петровським матричний диференціальний вираз [9]. Вважаємо далі

$r_m\le\dots\le r_1\le 2b-1$, $r_0=r_{m+1}=2b$, $(j)=0$ для $j=0,m+1$, $(j)=1$ для $j=\overline{1,m}$.

Матрицею Діріхле порядку $2b$ називається [4, с. 178] матриця з $2bp$ рядків, яку переставлянням рядків можна звести до вигляду $\mathcal{B}(x,t,D_x)=(\mathcal{B}_0(x,t,D_x),\dots,\mathcal{B}_{2b-1}(x,t,D_x))'$, де $\mathcal{B}_j(x,t,D_x)\equiv\sum\limits_{|\alpha|\le j}\tilde b_{j\alpha}(x,t)D_x^\alpha$, $\tilde b_{j\alpha}(x,t)$ – квадратні $p\times p$ матриці, і при цьому $det\mathcal{B}_{j0}(x,t,\nu)=det\sum\limits_{|\alpha|=j}\tilde b_{j\alpha}(x,t)\nu^\alpha\ne 0$ для довільних $(x,t)\in Q_1$, $\nu=\nu(x,t)$– орт внутрішньої нормалі до $\overline{Q}_1$ у точці (x,t), штрих означає транспонування.

Система крайових диференціальних виразів $\{B_j\}_{j=1}^m=\{B_j(x,t,D_x)\}_{j=1}^m$ називається *нормальною* [3], якщо матрицю $B=(B_1,\dots,B_m)'$ можна доповнити новими рядками до матриці Діріхле порядку $2b$.

Вважатимемо, що система $\{B_j\}_{j=1}^m$ рівномірно накриває оператор L ([4], с. 15), а також є нормальною.

В $\overline{Q}_0$ розглядаємо нормальну параболічну крайову задачу

$$L(x,t,D)u=F_0(x,t),\quad (x,t)\in Q_0 \tag{1.1}$$

$$B_j(x,t,D_x)u(x,t)=F_j(x,t),\ (x,t)\in Q_1,\quad j=\overline{1,m} \tag{1.2}$$

$$u\mid_{t=0}=F_{m+1}(x),\ x\in\Omega_0. \tag{1.3}$$

Згідно з [3], [4], с. 178 існують такі крайові диференціальні вирази $\hat B_j$, C_j, $\hat C_j$, $j=\overline{1,m}$ порядків $\hat r_j, m_j, \hat m_j$, причому $r_j+\hat m_j=m_j+\hat r_j=2b-1$, що правильна формула Гріна

$$\int\limits_{Q_0}[v'Lu-(L^*v)'u]dxdt+$$
$$\sum_{j=1}^m\int\limits_{Q_1}[\hat C_jvB_ju-\hat B_jvC_ju]dxdt+$$
$$\int\limits_{\Omega_0}[v'(x,0)u(x,0)-v'(x,T)u(x,T)]dx=0,\ u,\ v\in D(\overline{Q}_0),$$

де $L^*=D_t-A^*$, A^* – формально спряжений до A диференціальний вираз.

Позначимо через $\varrho_0(x)$ нескінченно диференційовну функцію в $\overline{\Omega}_0$, додатну в Ω_0, яка дорівнює нулю на Ω_1 та має порядок відстані $d(x)$ від точки $x \in \Omega_0$ до Ω_1 при $d(x) \to 0$, через $\varrho_1(t)$ – нескінченно диференційовну функцію в $[0,T]$, додатну при $t > 0$, яка має порядок t при $t \to 0$, через $\varrho(x,t)$ – нескінченно диференційовну функцію в $\overline{Q}_0$, додатну в Q_0, яка дорівнює нулю на $\overline{Q}_1 \cup \Omega_0$, має порядок $d(x)$ при $d(x) \to 0$ та $d(x) \le t^{\frac{1}{2b}}$, порядок $\varrho_1^{\frac{1}{2b}}(t)$ при $t \to 0$ та $d(x) \ge t^{\frac{1}{2b}}$. Також вважаємо $\varrho_0(t) \le 1$, $\varrho_1(x) \le 1$, $\varrho(x,t) \le 1$ для всіх $x \in \overline{\Omega}_0$, $t \in [0,T]$.

Використовуємо функційні простори із [4], [9]:

$C^k(\overline{\Omega}_0)$ – простір функцій φ, для яких неперервні похідні $D^\alpha\varphi$ з $|\alpha| \le [k]$ та (при нецілому k) скінченні $\sum\limits_{|\alpha|=[k]} \sup\limits_{x,y\in\overline{\Omega},x\ne y} \frac{\Delta_x^y D_x^\alpha \varphi(x)}{|x-y|^{k-[k]}}$, де $\Delta_x^y\psi(x) = \psi(y) - \psi(x)$,

$\mathcal{H}^k(Q_i) = C^k(\overline{Q}_i)$ – простір функцій φ, для яких неперервні похідні $D^{\overline{\alpha}}\varphi = D_t^{\alpha_0} D_x^\alpha \varphi$ з $|\overline{\alpha}| = |\alpha| + 2b\alpha_0 \le [k]$ та (при нецілому k) скінченні $\sum\limits_{0<|\overline{\alpha}|=[k]} \sup\limits_{(x,t),(y,\tau)\in\overline{Q}_i, x\ne y} \frac{\Delta_x^y D_{x,t}^{\overline{\alpha}}\varphi(x,t)}{|x-y|^{k-[k]}}$,

$\sum\limits_{0<k-|\overline{\alpha}|<2b} \sup\limits_{(x,t),(y,\tau)\in\overline{Q}_i, t\ne\tau} \frac{\Delta_t^\tau D_{x,t}^{\overline{\alpha}}\varphi(x,t)}{|t-\tau|^{\frac{k-|\overline{\alpha}|}{2b}}}$ – простір Гельдера, тут $\Delta_t^\tau\psi(x,t) = \psi(x,\tau) - \psi(x,t)$,

$C^{k,(0)}(\overline{Q}_i) = \{\varphi \in C^k(\overline{Q}_i) : D_t^j\varphi\,|_{t=T} = 0,\ 0 \le j \le [\frac{k}{2b}]\}$,

$\mathcal{H}^{k,(0)}(Q_i) = \{\varphi \in \mathcal{H}^k(Q_i) : D_t^j\varphi\,|_{t=T} = 0,\ 0 \le j \le [\frac{k}{2b}]\}$,

$\mathcal{H}^{k,r,(0)}(Q_i) = \{\varphi \in \mathcal{H}^{k,(0)}(Q_i) : D^{\overline{\alpha}}\varphi\,|_{\overline{Q}_1} = 0, |\overline{\alpha}| \le 2b - r - 2\}$, $\mathcal{H}^{k,2b-1,(0)}(Q_i) = \mathcal{H}^{k,(0)}(Q_i)$, $i = 0,1$, вводимо

$\mathcal{D}_r(\overline{\Omega}_0) = \{\varphi \in C^r(\overline{\Omega}_0)$ ($D(\overline{\Omega}_0)$ при цілому r): $\varrho_0^{|\alpha|-r} D^\alpha\varphi \in C(\overline{\Omega}_0), |\alpha| \le [r]\}$,

$\mathcal{D}_r^*(\overline{\Omega}_0) = \{\varphi \in C^{r+2b}(\overline{\Omega}_0)$ ($D(\overline{\Omega}_0)$ при цілому r): $A^*\varphi \in \mathcal{D}_r(\overline{\Omega}_0)\}$,

$\mathcal{X}_r(\overline{\Omega}_0) = \{\varphi \in \mathcal{D}_r^*(\overline{\Omega}_0) : \hat{B}_j\varphi = 0,\ j = \overline{1,m}\}$,

$X(\overline{\Omega}_0) = \{\varphi \in D(\overline{\Omega}_0) : \hat{B}_j\varphi = 0,\ j = \overline{1,m}\}$,

$\mathcal{D}_r(\overline{Q}_0) = \{\varphi \in C^{r,(0)}(\overline{Q}_0)$ ($D^0(\overline{Q}_0)$ при цілому r): $\varrho^{|\overline{\alpha}|-r} D^{\overline{\alpha}}\varphi \in C(\overline{Q}_0), |\overline{\alpha}| \le [r]\}$, $r \ge 0$,

$\mathcal{D}_r^*(\overline{Q}_0) = \{\varphi \in C^{r+2b,(0)}(\overline{Q}_0)$ ($D^0(\overline{Q}_0)$ при цілому r): $L^*\varphi \in \mathcal{D}_r(\overline{Q}_0)\}$,

$\mathcal{X}_r(\overline{Q}_0) = \{\varphi \in \mathcal{D}_r^*(\overline{Q}_0) : \hat{B}_j\varphi = 0,\ j = \overline{1,m}\}$,

$X(\overline{Q}_0) = \{\varphi \in D^0(\overline{Q}_0) :\ \hat{B}_j\varphi = 0,\ j = \overline{1,m}\}$,

$\mathcal{D}_r(\overline{Q}_1) = \{\varphi \in C^{r,(0)}(\overline{Q}_1) :$
$\varrho_1^{\frac{2b\alpha_0 - r}{2b}} D^{\overline{\alpha}}\varphi \in C(\overline{Q}_1), |\overline{\alpha}| \le r\}$, $r \ge 0$.

Скажемо, що $\varphi_\nu \to 0$ при $\nu \to \infty$ в $\mathcal{D}_r(\overline{Q}_0)$, якщо для довільного мультиіндексу $\overline{\alpha}$, $|\overline{\alpha}| \le r$ послідовність $\tilde{\varphi}_\nu = \varrho^{|\overline{\alpha}|-r} D^{\overline{\alpha}}\varphi_\nu$ збігається до нуля при $\nu \to \infty$ рівномірно в $\overline{Q}_0$. Подібно визначається збіжність у інших просторах.

Лема 1. *Для довільних чисел $r \ge 0$, $\varphi_j \in D(Q_1)$, $j = \overline{0, 2b-1}$, $\psi_0 \in D(\Omega_0)$ (зокрема, $\varphi_j \in \mathcal{D}_{r+2b-j}(Q_1)$, $j = \overline{0, 2b-1}$, $\psi_0 \in \mathcal{D}_{r+2b}(\Omega_0)$), довільної матриці Діріхле $\tilde{B}(x,t,D_x) = (\tilde{B}_0, \ldots, \tilde{B}_{2b-1})'$ з коефіцієнтами з $D(\overline{Q}_1)$ існує така вектор-функція $\psi \in \mathcal{D}_r^*(\overline{Q}_0)$, що $\tilde{B}_j\psi = \varphi_j$, $j = \overline{0, 2b-1}$ і $\psi\,|_{t=0} = \psi_0$.*

Лема доводиться за схемою доведення леми 4.3 із [6] (див. також [10]), де розглянуто випадок $\varphi_j \in D^0(\overline{Q}_1)$, $j = \overline{0, 2b-1}$, $\psi_0 \in D(\Omega_0)$.

З леми 1 випливає, що простори $\mathcal{X}_r(\overline{Q}_0)$ непорожні при $r \ge 0$.

С.Д. Івасишен побудував матрицю Гріна $G(x,t,y,\tau) = \big(G_0(x,t,y,\tau), \ldots, G_m(x,t,y,\tau)\big)$ задачі (1.1)–(1.3) ([4] та бібліогр.), вивчив її властивості, властивості інтегральних операторів Гріна

$$\mathcal{G}_j\varphi = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\Omega_j} G_j(\cdot,*,y,\tau)\varphi(y,\tau)dy,\ j = \overline{0,m},$$
$$\mathcal{G}_{m+1}\varphi = \int\limits_{\Omega_0} G_0(\cdot,*,y,0)\varphi(y)dy,$$

дослідив спряжені оператори Гріна [3]

$$\hat{\mathcal{G}}_j\varphi = \int\limits_\tau^T dt \int\limits_{\Omega_0} G_j'(x,t,\cdot,\cdot)\varphi(x,t)dx,\ j = \overline{0,m},$$
$$\hat{\mathcal{G}}_{m+1}\varphi = \int\limits_0^T dt \int\limits_{\Omega_0} G_0'(x,t,\cdot,0)\varphi(x,t)dx$$

на гельдерових просторах функцій, довів, що

$\hat{\mathcal{G}}_0 : \mathcal{H}^{k,(0)}(Q_0) \to \mathcal{H}^{k+2b,r_1,(0)}(Q_0) \subset \mathcal{H}^{k,(0)}(\overline{Q}_0)$,

$\hat{\mathcal{G}}_j : \mathcal{H}^{k,(0)}(Q_0) \to \mathcal{H}^{k+r_j+1,(0)}(Q_1)$, $j = \overline{1,m}$

та діють обмежено, довів теорему існування та єдиності розв'язків у гельдерових просторах узагальнених функцій, здобув зображення розв'язків за допомогою матриці Гріна. Для гладких $F_j = f_j$, $j = \overline{0, m+1}$, що задовольняють умови узгодження, зокрема для $f_j \in D(Q_j)$, $j = \overline{0,m}$, $f_{m+1} \in D(Q_2)$, розв'язок задачі (1.1)–(1.3) має вигляд [3]

$$u(x,t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\Omega_0} G_0(x,t,y,\tau)f_0(y,\tau)dy +$$
$$\sum_{j=1}^m \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\Omega_1} G_j(x,t,y,\tau)f_j(y,\tau)dy +$$
$$\int\limits_{\Omega_0} G_0(x,t,y,0)f_{m+1}(y)dy, (x,t) \in Q_0.$$

У [5] доведено, що при довільній $\psi \in C_{x,t}^{2b,1}(\overline{Q}_0)$, такій, що $\hat{B}_j\psi = 0$, $j = \overline{1,m}$, зокрема $\psi \in \mathcal{X}_r(\overline{Q}_0)$, правильні співвідношення

$$\int\limits_\tau^T dt \int\limits_{\Omega_0} G_0'(x,t,y,\tau)(L^*\psi)(x,t)dx = \psi(y,\tau),\ (y,\tau) \in \overline{Q}_0,$$
$$\int\limits_\tau^T dt \int\limits_{\Omega_0} G_j'(x,t,y,\tau)(L^*\psi)(x,t)dx = (\hat{C}_j\psi)(y,\tau),$$
$$(y,\tau) \in \overline{Q}_1,\ j = \overline{1,m}. \tag{1.4}$$

Спряжена до задачі (1.1)–(1.3) крайова задача є також нормальною й обернено параболічною [4, теорема 6 на с. 179].

З однозначної розв'язності спряженої параболічної крайової задачі в класах гладких функцій випливає, що для довільної $\varphi \in \mathcal{D}_r(\overline{Q}_0)$ існує розв'язок $\psi = \hat{\mathcal{G}}_0\varphi \in \mathcal{X}_r(\overline{Q}_0)$ системи $L^*\psi = \varphi$, тому з використанням формул (1.4) та леми 1 $\hat{C}_j\psi = \hat{\mathcal{G}}_j\varphi \in C^{[r]+r_j+1,(0)}(\overline{Q}_1)$, $j = \overline{1,m}$, $\psi(\cdot,0) = (\hat{\mathcal{G}}_0\varphi)(\cdot,0) \in \mathcal{X}_r(\overline{Q}_2)$. Отже,

$\hat{\mathcal{G}}_0 : \mathcal{D}_r(\overline{Q}_0) \to \mathcal{X}_r(\overline{Q}_0)$,

$\hat{\mathcal{G}}_j : \mathcal{D}_r(\overline{Q}_0) \to C^{[r]+r_j-1,(0)}(\overline{Q}_1),\ j=\overline{1,m},$
$\hat{\mathcal{G}}_{m+1} : \mathcal{D}_r(\overline{Q}_0) \to \mathcal{X}_r(\overline{\Omega}_0).$

II.

Нехай V' – простір лінійних неперервних функціоналів на V (простір узагальнених функцій), $(\varphi,F)_i=\sum_{j=1}^{p}(\varphi_j,F_j)_i$ – значення узагальненої вектор-функції $F=(F_1,\dots,F_p)\in V'(\overline{Q}_i)$ на основній вектор-функції $\varphi=(\varphi_1,\dots,\varphi_p)\in V(\overline{Q}_i),\ i=\overline{0,2}$, $s(F)$ – порядок сингулярності узагальненої функції F [11], [12], $s(F)=\max_{1\le j\le p}s(F_j)$ при $F=(F_1,\dots,F_p)$.

Зауважимо, що для всіх $r\ge 0$ простір $D(Q_i)$ щільний у $\mathcal{D}_r(\overline{Q}_i)$, якщо $f\in D'(\overline{Q}_i)$, то існує таке $r\ge 0$, що $f\in D_r'(\overline{Q}_i)$, $i=0,1,2$.

Припущення:

(**Fp**) $F_j\in D^{0\prime}(\overline{Q}_1)$, $s(F_j)\le s_j$, $j=\overline{1,m}$, $r\ge s'-1$, де $s'=\max_{1\le j\le m}(s_j-r_j)$, $F_0\in\mathcal{X}_r'(\overline{Q}_0)$, $F_{m+1}\in\mathcal{X}_r'(\overline{Q}_2)$;

(**Fp0**) $F_0\in X'(\overline{Q}_0)$, $F_j\in D^{0\prime}(\overline{Q}_1)$, $j=\overline{1,m}$, $F_{m+1}\in D'(\overline{Q}_2)$.

Формулювання задачі (1.1)–(1.3). За припущення (**Fp**)(відповідно (**Fp0**)) знайти таку узагальнену вектор-функцію $u\in\mathcal{D}_r'(\overline{Q}_0)$ (відповідно $u\in D^{0\prime}(\overline{Q}_0)$), що

$$(L^*\psi,u)_0=(\psi,F)_0+\sum_{j=1}^{m}(\hat{C}_j\psi,F_j)_1+(\psi\,|_{t=0},F_{m+1})_2$$
$$\forall\psi\in\mathcal{X}_r(\overline{Q}_0)(\forall\psi\in X(\overline{Q}_0)). \qquad (2.5)$$

Теорема 1. *За припущення* (**Fp**) ((**Fp0**)) *вектор-функція* $u\in\mathcal{D}_r'(\overline{Q}_0)$ $(u\in D^{0\prime}(\overline{Q}_0))$, *задана формулою*

$$(\varphi,u)_0=(\hat{\mathcal{G}}_0\varphi,F_0)_0+\sum_{j=1}^{m}(\hat{\mathcal{G}}_j\varphi,F_j)_1+(\hat{\mathcal{G}}_{m+1}\varphi,F_{m+1})_2$$
$$\forall\varphi\in\mathcal{D}_r(\overline{Q}_0)\quad(\forall\varphi\in D^0(\overline{Q}_0)), \qquad (2.6)$$

є єдиним розв'язком задачі (1.1)–(1.3).

□ *Доведення.* За припущення (**Fp0**) теорема доведена в [5]. Розглянемо випадок (**Fp**). За вищенаведеними властивостями спряжених операторів Гріна для довільної $\varphi\in\mathcal{D}_r(\overline{Q}_0)$ маємо $\psi=\hat{\mathcal{G}}_0\varphi\in\mathcal{X}_r(\overline{Q}_0)$, $\hat{C}_j\psi\in C^{[r]+r_j+1,(0)}(\overline{Q}_1)$, $j=\overline{1,m}$, $\psi(\cdot,0)\in\mathcal{X}_r(\overline{Q}_2)$, $C^{r+r_j+1,(0)}(\overline{Q}_1)\subset C^{s_j,(0)}(\overline{Q}_1)$ при $r\ge s_j-r_j-1$, $j=\overline{1,m}$. Отже, узагальнена вектор-функція (2.6) визначена для довільної $\varphi\in\mathcal{D}_r(\overline{Q}_0)$. Покажемо, що вона задовольняє тотожність (2.5). Підставляючи (2.6) в ліву частину (2.5) та використовуючи формули (1.4), матимемо

$$(L^*\psi,u)_0=(\hat{\mathcal{G}}_0(L^*\psi),F_0)_0+$$
$$\sum_{j=1}^{m}(\hat{\mathcal{G}}_j(L^*\psi),F_j)_1+(\hat{\mathcal{G}}_{m+1}(L^*\psi),F_{m+1})_2=$$
$$(\psi,F_0)+\sum_{j=1}^{m}(\hat{C}_j\psi,F_j)_1+(\psi(\cdot,0),F_{m+1})_2$$
$$\forall\psi\in\mathcal{X}_r(\overline{Q}_0),\ r\ge 0.$$

Якщо u_1,u_2 – два розв'язки задачі, $u=u_1-u_2$, то з (2.5) $(L^*\psi,u)_0=0$ для довільної $\psi\in\mathcal{X}_r(\overline{Q}_0)$. Як було відзначено вище, $L^*\psi\in\mathcal{D}_r(\overline{Q}_0)$ при $\psi\in\mathcal{X}_r(\overline{Q}_0)$, для довільної $\varphi\in\mathcal{D}_r(\overline{Q}_0)$ існує розв'язок $\psi\in\mathcal{X}_r(\overline{Q}_0)$ системи $L^*\psi=\varphi$ в Q_0. Тоді $(\varphi,u)=0$ для довільної $\varphi\in\mathcal{D}_r(\overline{Q}_0)$, тобто $u=0$ в $\mathcal{D}_r'(\overline{Q}_0)$, $r\ge 0$. ■

Примітка. Нехай $P=(x,t)$, $P_0=(x_0,t_0)$, $M=(y,\tau)$, $d(P,M)=|PM|=\left(|x-y|^2+|t-\tau|^{\frac{1}{b}}\right)^{\frac{1}{2}}$, $\varrho(P,P_0)$ – нескінченно диференційовна функція в $\overline{Q}_0$, додатна в $Q_0\setminus\{P_0\}$, яка дорівнює нулю в точці $P_0\in\overline{Q}_0$, має порядок $d(P,P_0)$ при $d(P,P_0)\to 0$ та $\varrho(P,P_0)\le 1$, $P\in\overline{Q}_0$,

$\mathcal{D}_r(\overline{Q}_0,P_0)=\{\varphi\in C^{r,(0)}(\overline{Q}_0)$ $(D^0(\overline{Q}_0)$ при цілому $r)$: $\varrho^{|\overline{\alpha}|-r}(\cdot,P_0)D^{\overline{\alpha}}\varphi\in C(\overline{Q}_0),|\overline{\alpha}|\le[r]\}$, $r\ge 0$,

$\varphi_\nu\to 0$ при $\nu\to\infty$ в $\mathcal{D}_r(\overline{Q}_0,P_0)$, якщо для всіх $\overline{\alpha}$, $|\overline{\alpha}|\le r$ послідовність $\tilde{\varphi}_\nu=\varrho^{|\overline{\alpha}|-r}(\cdot,P_0)D^{\overline{\alpha}}\varphi_\nu$ збігається до нуля при $\nu\to\infty$ рівномірно в $\overline{Q}_0$,

$\mathcal{D}_r^*(\overline{Q}_0,P_0)=\{\varphi\in C^{r+2b,(0)}(\overline{Q}_0)$ $(D^0(\overline{Q}_0)$ при цілому $r)$: $L^*\varphi\in\mathcal{D}_r(\overline{Q}_0,P_0)\}$,

$\mathcal{X}_r(\overline{Q}_0,P_0)=\{\varphi\in\mathcal{D}_r^*(\overline{Q}_0,P_0):\hat{B}_j\varphi=0,\ j=\overline{1,m}\}$.

Як у теоремі 1 доводиться, що за припущення

$P_0\in Q_0\cup Q_1$, $F_j\in D^{0\prime}(\overline{Q}_1)$, $s(F_j)\le s_j$, $j=\overline{1,m}$,
$F_{m+1}\in D'(\overline{Q}_2)$, $s(F_{m+1})\le s_{m+1}$,
$r\ge s_0'$, де $s'=\max_{1\le j\le m+1}[s_j-r_j-(j)]$,
$F_0\in\mathcal{X}_r'(\overline{Q}_0,P_0)$

вектор-функція $u\in\mathcal{D}_r'(\overline{Q}_0,P_0)$, задана формулою (2.6) для довільної $\varphi\in\mathcal{D}_r(\overline{Q}_0,P_0)$, є єдиним розв'язком задачі (1.1)–(1.3) – задовольняє тотожність (2.5) для довільної $\psi\in\mathcal{X}_r(\overline{Q}_0,P_0)$.

III.

Нижче використовуємо позначення із [3, 9]

$E_c(z,t)=exp\{-cz^{\frac{2b}{2b-1}}t^{-\frac{1}{2b-1}}\}$,
$\tilde{\Phi}_c^k(z,t)=(z^k+1)E_c(z,t)$, $\Phi_c^k(z,t)=z^kE_c(z,t)$, $k\in\mathbb{R}^1$,
$\overline{\alpha}_i=\overline{\alpha}$ для $i=\overline{0,m}$, $\overline{\alpha}_{m+1}=\alpha$,

функційні простори із [7]

$\mathcal{Z}_k(\overline{Q}_i,P_0)=\{\varphi\in D^0(\overline{Q}_i\setminus P_0):\Phi_{-c}^{|\overline{\alpha}_i|-k}(\varrho(\cdot,P_0),t-t_0)D^{\overline{\alpha}_i}\varphi\in C(\overline{Q}_i)\quad\forall\overline{\alpha}_i\}$, $k\in\mathbb{R}$, $P_0\in\overline{Q}_i$,

$Z_k(\overline{Q}_i,P_0)=\{\varphi\in D^0(\overline{Q}_i\setminus P_0)\cap C^{[k]}(\overline{Q}_i):\Phi_{-c}^{|\overline{\alpha}_i|-k}(\varrho(\cdot,P_0),t-t_0)D^{\overline{\alpha}_i}\varphi\in C(\overline{Q}_i)\quad\forall|\overline{\alpha}_i|\ge k\}$, $k>0$,

$Z_k(\overline{Q}_i,P_0)=\mathcal{Z}_k(\overline{Q}_i,P_0)$ при $k\le 0$, $i=0,1$

та вводимо функційні простори

$\mathcal{Z}_k(\Omega_0)=\{\varphi\in C^\infty(\Omega_0)$: $\varrho_0^{|\alpha|-k}D^\alpha\varphi\in C(\overline{\Omega}_0)\quad\forall\alpha\}$, $k\in\mathbb{R}$,

$Z_k(\Omega_0)=\{\varphi\in C^\infty(\Omega_0)\cap C^{[k]}(\overline{\Omega}_0)$: $\varrho_0^{|\alpha|-k}D^\alpha\varphi\in C(\overline{\Omega}_0)\quad\forall|\alpha|\ge k\}$, $k>0$,

$Z_{-k}(\Omega_0)=\mathcal{Z}_{-k}(\Omega_0)$, $k\ge 0$,

$\mathcal{Z}_k(Q_0)=\{\varphi\in C^{\infty,(0)}(Q_0):\varrho^{|\overline{\alpha}|-k}D^{\overline{\alpha}}\varphi\in C(\overline{Q}_0)\ \forall\overline{a}\}$, $k\in\mathbb{R}$,

$Z_{k,r}(Q_0) = \{\varphi \in C^{\infty,(0)}(Q_0) \cap C^k(\overline{Q}_0) \cap C^r(\overline{Q}_1) :$ $\varrho^{|\overline{\alpha}|-k} D^{\overline{\alpha}}\varphi \in C(\overline{Q}_0)$, $\varrho_1^{\frac{2b\alpha_0-r}{2b}} D^{\overline{\alpha}}\varphi \in C(\overline{Q}_1)$ $\forall|\overline{\alpha}| \geq k, 2b\alpha_0 \geq r\}$, $k > 0$, $r > 0$,

$Z_k(Q_0) = Z_{k,k}(Q_0)$,

$\mathcal{Z}_r(Q_1) = \{\varphi \in C^{\infty,(0)}(Q_1) : \varrho_1^{\frac{2b\alpha_0-r}{2b}} D^{\overline{\alpha}}\varphi \in C(\overline{Q}_1)\ \forall\overline{\alpha}\}$, $r \in \mathbb{R}$,

$Z_r(Q_1) = \{\varphi \in C^{\infty,(0)}(Q_1) \cap C^r(\overline{Q}_1) : \varrho_1^{\frac{2b\alpha_0-r}{2b}} D^{\overline{\alpha}}\varphi \in C(\overline{Q}_1)\ \forall|\overline{\alpha}| \geq r\}$, $r > 0$.

Скажемо, що $\varphi_\nu \to 0$ при $\nu \to \infty$ в $\mathcal{Z}_k(\overline{Q}_i, P_0)$, якщо для довільного мультиіндексу $\overline{\alpha}_i$ послідовність $\tilde{\varphi}_{\overline{\alpha}_i\nu}(P) = \Phi_{-c}^{|\overline{\alpha}_i|-k}(\varrho(P,P_0), t-t_0) D^{\overline{\alpha}_i}\varphi_\nu(P)$ збігається до нуля при $\nu \to \infty$ рівномірно в $\overline{Q}_i$,

$\varphi_\nu \to 0$ при $\nu \to \infty$ в $Z_k(\overline{Q}_i, P_0)$, якщо для $|\overline{\alpha}_i| \leq [k]$ послідовність $D^{\overline{\alpha}_i}\varphi_\nu(P)$, а для $|\overline{\alpha}_i| \geq k$ послідовність $\tilde{\varphi}_{\overline{\alpha}_i\nu}(P)$ збігається до нуля при $\nu \to \infty$ рівномірно в $\overline{Q}_i$, $i = 0, 1$. Подібно визначається збіжність у інших просторах.

Функції з просторів Z_k та $\mathcal{Z}_k$ мають спільні властивості, для $Z_k = Z_k(\overline{Q}_i, P_0)$ та $\mathcal{Z}_k = \mathcal{Z}_k(\overline{Q}_i, P_0)$ встановлені в [7]. Сформулюємо їх для випадку $Z_k = Z_k(Q_i)$, $i = 0, 1$:

(1) При $k > 0$ $\quad Z_k(Q_i) \subset C^k(\overline{Q}_i) => (C^k(\overline{Q}_i))' \subset Z_k'(Q_i)$, $D^0(\overline{Q}_i) \subset Z_{-k}(Q_i)$, $Z_{-k}'(Q_i) \subset D^{0\prime}(\overline{Q}_i)$.

(2) Якщо $\varphi \in Z_k$, то $D^{\overline{\gamma}}\varphi \in Z_{k-|\gamma|}$.

(3) $Z_{k_2} \subset Z_{k_1}$ для $k_2 > k_1$.

(4) $Z_{-k} \subset Z_k' \subset \mathcal{Z}_k'$, $k \in \mathbb{R}^1$; якщо $f \in \mathcal{Z}_{-k}$, то f – регулярна узагальнена функція з $\mathcal{Z}_k'$.

(5) Якщо $g(P) = \varrho^{-k}(P, P_0) g_0(P)$, де $g_0(P)(P \in \overline{Q}_i)$– обмежена в Q_i функція, то $g \in Z_{k-n+(i)-2b+\varepsilon}'(\overline{Q}_i, P_0)$, $\varepsilon > 0$.

При $g_0 \in L_1(Q_0)$ також $g \in \mathcal{X}_k'(\overline{Q}_0, P_0)$.

При $g_{\overline{\alpha}} \in L_1(Q_0)$, $|\overline{\alpha}| \leq r$ маємо

$$g = \sum_{|\overline{\alpha}| \leq r} D^{\overline{\alpha}}(\varrho^{\overline{\alpha}-k}(\cdot, P_0) g_{\overline{\alpha}}) \in \mathcal{Z}_k'(\overline{Q}_0, P_0),$$

$$g = \sum_{|\overline{\alpha}| \leq k} D^{\overline{\alpha}} g_{\overline{\alpha}} + \sum_{k < |\overline{\alpha}| \leq r} D^{\overline{\alpha}}(\varrho^{\overline{\alpha}-k}(\cdot, P_0) g_{\overline{\alpha}}) \in$$

$Z_k'(\overline{Q}_0, P_0)$ і має порядок сингулярності $\leq r$.

Доведемо розв'язність нормальної параболічної крайової задачі (1.1)–(1.3) з правими частинами з вагових просторів узагальнених функцій Z_k', $k \geq 0$.

Лема 2. *(1)* $\hat{\mathcal{G}}_i : \mathcal{Z}_k(\overline{Q}_0, P_0) \to Z_{k+r_i+(i)}(\overline{Q}_{(i)}, P_0)$, *$k > -n - 2b$, $i = \overline{0, m+1}$;*

(2) $\hat{\mathcal{G}}_0 : \mathcal{Z}_k(Q_0) \to Z_{k+1-n,k+2b}(Q_0)$,
$\hat{\mathcal{G}}_i : \mathcal{Z}_k(Q_0) \to Z_{k+r_i+1}(Q_1)$, $i = \overline{1, m}$,
$\hat{\mathcal{G}}_{m+1} : \mathcal{Z}_k(Q_0) \to Z_{k+1-n}(\Omega_0)$, $k \geq 0$.

□ *Доведення.* Твердження (1) встановлено у [7]. Для доведення твердження (2) використовуємо розбиття $Q_0^\tau = (\tau, T] \times \Omega_0$ на

$Q^1 = \{(x,t) \in Q_0^\tau : d(x) < \min\{t^{\frac{1}{2b}}, d_0\}\}$,

$Q^2 = \{(x,t) \in Q_0^\tau : t^{\frac{1}{2b}} < \min\{d(x), d_0\}\}$,

$Q^3 = Q_0^\tau \setminus (\overline{Q^1 \cup Q^2})$, d_0 – додатне мале число.

Для кожної точки $M = (y,\tau) \in Q_0^\tau$ проводимо дослідження вектор-функцій $v_{j\overline{\alpha}}(y,\tau) = D^{\overline{\alpha}} \int_{Q^\tau} \varphi(x,t) G_j(x,t,y,\tau) dxdt$, $j = \overline{0, m+1}$, $\varphi \in \mathcal{Z}_k(Q_0)$. Як у [7] та [13], одержуємо оцінки

$$|v_{0\overline{\alpha}}(y,\tau)|_p \leq C_0(1 + \varrho_0^{k+1-n-|\overline{\alpha}|}(y)),\ (y,\tau) \in Q^1,$$

де $|g|_p = |g_1| + \cdots + |g_p|$ для вектор-функції $g = (g_1, \ldots, g_p)$, C_0 – додатна стала. Отже, $\varrho_0^{|\alpha|+n-1-k} v_{0\overline{\alpha}} \in C(Q^1)$. Також $v_{j\overline{\alpha}}(y,\tau) \in C(\overline{Q}_1)$ при $\varphi \in \mathcal{Z}_k(Q_0)$ та $k + r_j + 2 - n - 2b - |\overline{\alpha}| > 0$, $j = \overline{1, m}$.

Для кожної точки $M \in Q^2$ область Q^2 розбиваємо на $\quad Q^{21} = Q^{21}(y,\tau) = \{(x,t) \in Q^2 : \tau < t < 2\tau\}$, $Q^{22} = Q^2 \setminus \overline{Q^{21}}$. Використовуючи заміну

$x_i = \tau^{\frac{1}{2b}}\xi_i$, $y_i = \tau^{\frac{1}{2b}}s_i$, $i = \overline{1, n}$, $t = \tau\xi_{n+1}$, $\tau = \tau s_{n+1}$, одержуємо оцінки

$$|D^{\overline{\alpha}} \int_{Q^{21}} \varphi(x,t) G_j(x,t,y,\tau) dxdt|_p \leq C_j^1 \tau^{\frac{k+r_j+(j)-|\overline{\alpha}|}{2b}},$$

$j = \overline{0, m}$, а отже, неперервність $\varrho_1^{\frac{2b\alpha_0-(k+r_j+(j))}{2b}} v_{j\overline{\alpha}}$ в Q^{21}, $j = \overline{0, m}$. При $M \in Q^{22}$ використовуємо одержані під час доведення (1) оцінки з [7], а при $M \in Q^3$ – результати [3].

Нехай при $\hat{P} \in Q_1$

$X_k(\overline{Q}_0, \hat{P}) = \{\psi \in Z_{k+2b}(\overline{Q}_0, \hat{P}) : L^*\psi \in \mathcal{Z}_k(\overline{Q}_0, \hat{P})$,
$\hat{C}_j\psi \in Z_{k+r_j+1}(\overline{Q}_1, \hat{P})$, $\hat{B}_j\psi = 0$, $j = \overline{1, m}\}$,

при $\hat{P} \in Q_2$

$X_k(\overline{Q}_0, \hat{P}) = \{\psi \in Z_{k+2b}(\overline{Q}_0, \hat{P}) : L^*\psi \in \mathcal{Z}_k(\overline{Q}_0, \hat{P})$,
$\hat{C}_j\psi \in C^{k+r_j+1}(\overline{Q}_1)$, $\hat{B}_j\psi = 0$, $j = \overline{1, m}\}$,

$X_k(Q_0) = \{\psi \in Z_{k+1-n,k+2b}(Q_0) : L^*\psi \in \mathcal{Z}_k(Q_0)$,
$\hat{C}_j\psi \in Z_{k+r_j+1}(Q_1), \hat{B}_j\psi = 0, j = \overline{1, m}\}$.

У [7] доведено, що при $k \geq -1 - \hat{m}$ простір $X_k(\overline{Q}_0, \hat{P})$ непорожний, для довільних $\psi \in X_k(\overline{Q}_0, \hat{P})$ і для таких k правильні формули (1.4). ■

Припущення

(Z): $F_0 \in Z_{k_0}'(\overline{Q}_0, \hat{P})$, $F_j \in Z_{k_j}'(\overline{Q}_1, \hat{P})$, $j = \overline{1, m}$,
$F_{m+1} \in D'(\overline{\Omega}_0)$, $s(F_{m+1}) \leq k_{m+1}$,
$k \geq \hat{k} = \max_{1 \leq j \leq m+1}(k_j - r_j - (j)) \qquad$ при $\hat{P} \in Q_1$;
$F_0 \in Z_{k_0}'(\overline{Q}_0, \hat{P})$, $F_j \in D^{0\prime}(\overline{Q}_1)$ та $s(F_j) \leq k_j$,
$j = \overline{1, m}$, $F_{m+1} \in Z_{k_{m+1}}'(\overline{\Omega}_0, \hat{P})$,
$k \geq \hat{k} \qquad$ при $\hat{P} \in Q_2$;

(Zp): $F_0 \in Z_{k+1-n,k+2b}'(Q_0)$, $F_j \in Z_{k+r_j+1}'(Q_1)$ та
$s(F_j) \leq k + r_j + 1 - n - 2b$, $j = \overline{1, m}$,
$F_{m+1} \in Z_{k+1-n}'(\overline{\Omega}_0)$, $k \geq 0$.

Означення 1. За припущення (Z) розв'язком задачі (1.1)–(1.3) називається узагальнена функція $u \in \mathcal{Z}_k'(\overline{Q}_0, \hat{P})$, яка задовольняє тотожність (2.5) для довільної $\psi \in X_k(\overline{Q}_0, \hat{P})$. За припущення (Zp) розв'язком задачі (1.1)–(1.3) є узагальнена функція $u \in \mathcal{Z}_k'(Q_0)$, яка задовольняє тотожність (2.5) для довільної $\psi \in X_k(Q_0)$.

Теорема 2. *За припущення (Z) (відповідно (Zp)) існує єдиний розв'язок задачі (1.1)–(1.3), який виражається формулою (2.6) для довільної $\varphi \in \mathcal{Z}_k(\overline{Q}_0, \hat{P})$ (відповідно $\varphi \in \mathcal{Z}_k(Q_0)$).*

□ *Доведення.* За припущення (Z) теорема доведена в [7]. Розглянемо випадок припущення (Zp).

Нехай $\varphi \in \mathcal{Z}_k(Q_0)$. За лемою 2 $\hat{\mathcal{G}}_0\varphi \in Z_{k+1-n,k+2b}(Q_0)$ і тому відображення $F_0 \to u_0$, задане формулою

$$(\varphi, u_0)_0 = (\hat{\mathcal{G}}_0\varphi, F_0)_0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{Z}_k(Q_0),$$

для всіх $k \geq 0$ визначає $u_0 \in \mathcal{Z}'_k(Q_0)$. За лемою 2 також $\hat{\mathcal{G}}_j\varphi \in Z_{k+r_j+1}(Q_1) \cap C^{k+r_j+1-n-2b}(\overline{Q}_1)$, $j = \overline{1,m}$, $\hat{\mathcal{G}}_{m+1}\varphi \in Z_{k+1-n}(\Omega_0)$, тому формулами

$$(\varphi, u_j)_0 = (\hat{\mathcal{G}}_j\varphi, F_j)_1, \quad j = \overline{1,m},$$

$$(\varphi, u_{m+1})_0 = (\hat{\mathcal{G}}_{m+1}\varphi, F_j)_2 \quad \forall \varphi \in \mathcal{Z}_k(Q_0)$$

визначено $u_j \in \mathcal{Z}'_k(Q_0)$, $j = \overline{1, m+1}$.

Вектор-функція (2.6), тобто $u = \sum\limits_{j=0}^{m+1} u_j$, задовольняє умову (2.5) для довільної $\psi \in X_k(Q_0)$. Справді, для довільної $\psi \in X_k(Q_0)$ маємо $L^*\psi \in \mathcal{Z}_k(Q_0) \cap \mathcal{Z}_k(\Omega_0)$ і за лемою 2 $\hat{\mathcal{G}}_0(L^*\psi) \in Z_{k+1-n,k+2b}(Q_0)$, $\hat{\mathcal{G}}_j(L^*\psi) \in Z_{k+r_j+1}(Q_1) \cap C^{k+r_j+1-n-2b}\overline{Q}_1$, $j = \overline{1,m}$, $\hat{\mathcal{G}}_{m+1}(L^*\psi) \in Z_{k+1-n}(Q_2)$. Згідно з формулами (1.4), правильними для функцій $\psi \in \mathcal{X}_k(\overline{Q}_0)$ при $k \geq 0$,

$$(L^*\psi, u_0)_0 = (\hat{\mathcal{G}}_0(L^*\psi), F_0)_0 = (\psi, F_0)_0,$$

$$(L^*\psi, u_j)_0 = (\hat{\mathcal{G}}_j(L^*\psi), F_j)_1 = (\hat{C}_j\psi, F_j)_1,\ j = \overline{1,m},$$
$$(L^*\psi, u_{m+1})_0 = (\hat{\mathcal{G}}_{m+1}(L^*\psi), F_{m+1})_2 = (\psi, F_{m+1})_2.$$

Нехай v, w–два розв'язки задачі (1.1)-(1.3) (з $\mathcal{Z}'_k(Q_0)$). Тоді вектор-функція $u = v - w$ задовольняє тотожність $(L^*\psi, u)_0 = 0$ для довільної $\psi \in X_k(Q_0)$.

Для довільної $\varphi \in \mathcal{Z}_k(Q_0)$ існує $\psi = \hat{\mathcal{G}}_0\varphi$. За властивостями матриці Гріна та лемою 2 $L^*\psi = \varphi$, $\hat{B}_j\psi = 0$, $\hat{C}_j\psi = \hat{C}_j\hat{\mathcal{G}}_0\varphi = \hat{\mathcal{G}}_j\varphi \in Z_{k+r_j+1}(Q_1)$, $j = \overline{1,m}$. Отже, $\psi \in X_k(Q_0)$. Тому маємо $(\varphi, u)_0 = 0$ для довільної $\varphi \in \mathcal{Z}_k(Q_0)$, тобто $u = 0$ в $\mathcal{Z}'_k(Q_0)$. ■

Висновки

Доведено теореми існування та єдиності розв'язків нормальних лінійних параболічних крайових задач з правими частинами з вагових просторів узагальнених функцій та одержано зображення розв'язків.

Література

[1] Житарашу Н.В. Теоремы об изоморфизмах в L_p-теории слабых решений параболических граничных задач / Н.В. Житарашу // Докл. АН СССР. – 1981. – Т. 260, № 5. – С. 1054–1058.

[2] Житарашу Н.В. О разрешимости параболической граничной задачи при наличии степенных особенностей в правых частях / Н.В. Житарашу // Мат. исследования (Кишинев). – 1987. – № 92. – С. 69–97.

[3] Ивасишен С.Д. Сопряженные операторы Грина. Обобщенные решения параболических граничных задач с нормальными граничными условиями / С.Д. Ивасишен // Докл. АН СССР. – 1971. – Т. 197, № 2. – С. 261–264.

[4] Ивасишен С.Д. Матрицы Грина параболических граничных задач / Ивасишен С.Д. – К.: Вища школа, 1990. – 200 с.

[5] Лопушанская Г.П. О решении с помощью матрицы Грина параболической граничной задачи в пространстве обобщенных функций / Г.П. Лопушанская // Укр. мат. ж. – 1986. – Т. 38, № 6. – С. 795–798.

[6] Лопушанська Г.П. Крайові задачі у просторі узагальнених функцій D' / Лопушанська Г.П. – Львів: Вид-во Львів. нац. ун-ту ім. І. Франка, 2002. – 285 с.

[7] Лопушанська Г. П. Про розв'язок параболічної граничної задачі із сильними степеневими особливостями в правих частинах // Матем. студії. – 2001. – Т. 15, № 2. – С. 179–190.

[8] Солонников В.А. Оценки решений параболических начально-краевых задач в весовых гельдеровских нормах / В.А. Солонников, А.Г. Хачатрян // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. – 1980. – Т. 147. – С. 147-155.

[9] Эйдельман С.Д. Параболические системы / Эйдельман С.Д. – М.: Наука, 1964. – 443 с.

[10] Лопушанська Г. Узагальнені крайові значення розв'язків півлінійних еліптичних та параболічних рівнянь / Г. Лопушанська, О. Чмир // Нелин. гран. задачи. – 2007. – Т.17. – С. 50–73.

[11] Владимиров В.С. Уравнения математической физики / Владимиров В.С. М.: Наука, 1981. – 512 с.

[12] Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй спецкурс / Шилов Г.Е. – М.: Наука, 1965. – 328 с.

[13] Лопушанська Г.П. Про деякі властивості спряжених операторів Ґріна параболічної крайової задачі / Г.П. Лопушанська, О.Ю. Чмир // Наук. вісник Чернів. ун-ту. Математика. – 2004. – Вип. 191, 192. – С. 82–88.

ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Г.П. Лопушанская

Львовский национальний университет имени Ивана Франко
ул. Университетская, 1, Львов, 79001, Украина

Доказана однозначная разрешимость нормальных линейных параболических краевых задач в весовых пространствах обобщенных функций.

Ключевые слова: нормальная параболическая краевая задача; обобщенная функция; весовое функциональное пространство; матрица Грина; сопряженные операторы Грина.

2000 MSC: 35K55

УДК: 517.95

THE PARABOLIC BOUNDARY VALUE PROBLEMS IN WEIGHT SPACES OF THE GENERALIZED FUNCTIONS

H.P. Lopushanska[a]

[a] *Lviv National University named after Ivay Franko*
1 University Str., 79000, Lviv, Ukraine

The uniqueness solvability of the normal linear parabolic boundary value problem in weight spaces of the generalized functions is established

Key words: normal parabolic boundary value problem, generalized function, weight functional space, Green matrix, adjoint Green operators

2000 MSC: 2000: 35K55

УДК: 517.95